Exercice 48 p. 34 :

1. On a :
$$\frac{14}{99} = 0,1414141414141...$$
Ainsi, on a :
$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 4 \qquad a_3 = 1 \qquad a_4 = 4.$$
On a alors :
$$a_2 = a_1 + 3 \qquad \text{et} \qquad a_3 = a_2 - 3.$$
La suite (a_n) ne peut donc pas être airthmétique. De plus, on a :
$$a_2 = a_1 \times 4 \qquad \text{et} \qquad a_3 = a_2 \times \frac{1}{4}.$$
La suite (a_n) ne peut donc pas être géométrique.
2. La suite (b_n) étant la suite des nombres entiers multiples de 3, on peut écrire son terme général :
$$b_n = 3n.$$
Le terme général b_n est de la forme $b_n = m \times n + p$: il s'agit donc du terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 3$.
3. La suite c_n vérifie la relation de récurrence de la forme $c_{n+1} = q \times c_n$ où $q = 5$: il s'agit donc d'une suite géométrique de raison $q = 5$.
4. Le terme général d_n est de la forme $d_n = a \times b^n$ où $a = -1$ et $b = 4$: il s'agit donc du terme général d'une suite géométrique de raison $q = 4$.
5. Le terme général e_n est de la forme $e_n = m \times n + p$ où $m = \frac{1}{3}$ et $p = 1$: il s'agit donc du terme général d'une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$.
6. On a :
$$f_0 = 2 \qquad f_1 = -1 \qquad f_2 = 2 \qquad f_3 = -1.$$
On a alors :
$$f_1 = f_0 - 3 \qquad \text{et} \qquad f_2 = f_1 + 3.$$
La suite (f_n) ne peut donc pas être airthmétique. De plus, on a :
$$f_1 = f_0 \times \frac{-1}{2} \qquad \text{et} \qquad f_2 = f_1 \times (-2).$$
La suite (f_n) ne peut donc pas être géométrique.

Exercice 49 p. 34 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} w_n &= u_n + v_n \\ &= \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} + \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2} \\ &= \frac{3 \times 2^n + 3 \times 2^n}{2} \\ &= 3 \times 2^n. \end{aligned}$$
Le terme général de la suite (w_n) est de la forme $a \times b^n$ avec $a = 3$ et $b = 2$.
Ainsi, la suite (w_n) est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_0 = 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} t_n &= u_n - v_n \\ &= \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} - \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2} \\ &= \frac{-4n + 3 - 4n + 3}{2} \\ &= -4n + 3. \end{aligned}$$
Le terme général de la suite (w_n) est de la forme $a\,n + b$ avec $a = -4$ et $b = 3$.
Ainsi, la suite (t_n) est la suite arithmétique de raison $r = -4$ et de premier terme $t_0 = 3$.
La raison $r = -4 < 0$, la suite (t_n) est ainsi décroissante.

Exercice 43 p. 34 :

Méthode : pour démontrer qu'une suite est géométrique, on peut :

- utiliser directement le théorème vu en classe (DANGER : beaucoup de cas à connaitre) ;
- On donne le terme général et on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1. On a $u_0 = 3$ et $q = 2$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_n = 3 \times 2^n.$$
   Ainsi, on a :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n \\ &= 3 \times 2^n (2-1) \\ &= 3 \times 2^n > 0. \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_{n+1} > u_n.$$
   La suite (u_n) est donc strictement croissante.
2. On a $v_0 = -1$ et $q = \dfrac{4}{5}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$v_n = -\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$
   Ainsi, on a :
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - \left(-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \\ &= -\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} + \left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \left(-\frac{4}{5} + 1\right) \\ &= \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n > 0. \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$v_{n+1} > v_n.$$
   La suite (v_n) est donc strictement croissante.
3. On a $w_0 = -\dfrac{2}{3}$ et $q = \dfrac{8}{3}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$w_n = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{8}{3}\right)^n.$$
   Ainsi, on a :
   $$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= -\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^{n+1} - \left(-\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n\right) \\ &= -\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^{n+1} + \frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n \left(-\frac{8}{3} + 1\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right)^n < 0. \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$w_{n+1} < w_n.$$
   La suite (w_n) est donc strictement croissante.
4. On a $t_0 = 0,5$ et $q = 10^{-1}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$t_n = 0,5 \times 10^{-n}.$$
   Ainsi, on a :
   $$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= 0,5 \times 10^{-(n+1)} - 0,5 \times 10^{-n} \\ &= 0,5 \times 10^{-n} (10^{-1} - 1) \\ &= 0,5 \times 10^{-n} \times (-0,9) < 0. \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$t_{n+1} < t_n.$$
   La suite (t_n) est donc strictement croissante.