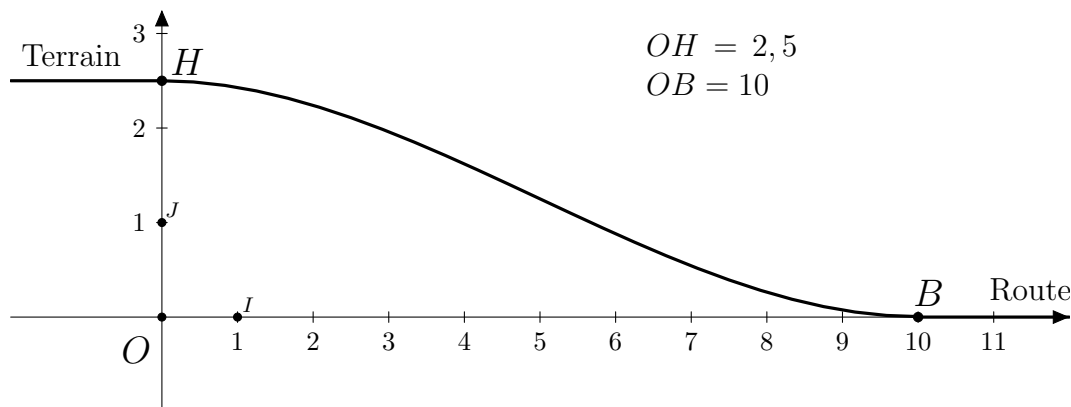




C'est l'automne et il faut amener de l'engrais au jardin. Cependant il y a un dénivelé entre le terrain du jardin et la route.

Emma convainc son père d'installer une rampe métallique en pente douce permettant de faire franchir le palier à des chariots.

La pente doit être tangente à la route et tangente au terrain (voir profil sur la figure, le plan étant muni du repère $(O; I; J)$).

1. On considère une rampe rectiligne (segment $[BH]$) représentée par une fonction f définie sur $[0; 10]$.
 - (a) Déterminer l'expression algébrique de f .
 - (b) Expliquer en quoi cette fonction f ne remplit les conditions données sur la pente.
2. On considère une solution formée de deux paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de sommets respectifs H et B , se raccordant en un point A d'abscisse 5, c'est-à-dire ayant même tangente en leur point commun A .

- (a) Démontrer que $\mathcal{P}_1$ est la courbe représentative d'une fonction f_1 définie sur $[0; 5]$ par :

$$f_1(x) = a_1x^2 + 2,5 \quad (\text{où } a_1 \text{ reste à déterminer}).$$

- (b) Démontrer que $\mathcal{P}_2$ est la courbe représentative d'une fonction f_2 définie sur $[5; 10]$ par :

$$f_2(x) = \frac{-b_2}{20}x^2 + b_2x - 5b_2 \quad (\text{où } b_2 \text{ reste à déterminer}).$$

- (c) A l'aide de l'information « se raccordant en un point A d'abscisse 5, c'est-à-dire ayant même tangente en leur point commun A », en déduire que l'expression des fonctions f_1 et f_2 est donnée par :

$$f_1(x) = -0,05x^2 + 2,5 \quad \text{et} \quad f_2(x) = 0,05x^2 - x + 5.$$

Aide : dans un premier temps, on pourra supposer que les deux paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se rejoignent en $A(5; 1,25)$.

On vérifiera, dans un second temps, que les tangentes aux paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ en A sont les mêmes afin de répondre à la question.

- (d) Faire une figure.
3. On décide de donner à la rampe un profil d'équation $y = f(x)$ où f est une fonction polynôme de degré 3, c'est-à-dire

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

- (a) Démontrer que les données de l'énoncé nous amène à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 15a + b = 0 \\ 1000a + 100b + 2,5 = 0 \\ d = 2,5 \\ c = 0 \end{cases}$$

- (b) Résoudre le système précédent et en déduire l'expression algébrique de f .
- (c) Faire une figure.
- (d) Calculer la pente maximale de la rampe (c'est-à-dire le maximum de $|f'(x)|$).