

II. Les suites géométriques

Exercice(s) :

Faire les exercices 43 et 44 p. 33.

Complément(s) :

Lire la vidéo du manuel « Suites particulières - Suites Géométriques ».
Elle résume l'ensemble des propriétés et définitions vues précédemment.

Propriété 9.24 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de raison q .

- Si $q \neq 1$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.\end{aligned}$$

- Si $q = 1$, alors :

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n + 1)u_0.$$

De manière plus générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a :

- Si $q \neq 1$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^n u_k &= u_p + \dots + u_n \\ &= u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.\end{aligned}$$

- Si $q = 1$, alors :

$$\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1)u_p.$$

Démonstration 9.25 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de raison q . Ainsi, on a :

q .

On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

En utilisant la propriété précédente, $u_n = u_0 \times q^n$,

on a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= u_0 + u_0 \times q + \dots + u_0 \times q^n$$

$$= u_0 (1 + q + \dots + q^n).$$

- Si $q \neq 0$, on en déduit alors que :

$$q \times S_n = u_0 (q + q^2 + \dots + q^{n+1}).$$

Donc, en utilisant les deux dernières égalités,

on a :

$$S_n - qS_n = u_0 (1 - q^{n+1}) \iff S_n (1 - q) = u_0 (1 - q^{n+1})$$

$$\iff S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- Si $q = 1$, la suite est constante à u_0 , et on en déduit que :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= u_0 + u_0 + \dots + u_0$$

$$= u_0(n + 1)$$

De manière plus général, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n u_k &= \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{p-1} u_k \\ &= S_n - S_{p-1}. \end{aligned}$$

- Si $q \neq 0$, alors :

$$\sum_{k=p}^n u_k = S_n - S_{p-1}$$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - u_0 \times \frac{1 - q^p}{1 - q}$$

$$= \frac{u_0}{1 - q} (1 - q^{n+1} - 1 + q^p)$$

$$= \frac{u_0}{1 - q} (q^p - q^{n+1})$$

$$= \frac{u_0}{1 - q} q^p (1 - q^{n+1-p})$$

$$= u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

- Si $q = 1$, la suite est constante à $u_p = u_0$ et alors on a :

$$\sum_{k=p}^n u_k = S_n - S_{p-1}$$

$$= u_0(n + 1) - u_0$$

$$= u_0(n - p + 1)$$

$$= u_p(n - p + 1).$$

□

Exemple 9.26 :

Calculons $\sum_{i=0}^8 2^i$.

2^i est le terme général d'une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme 1.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^8 2^i &= 1 \times \frac{1 - 2^9}{1 - 2} \\ &= 511. \end{aligned}$$

Complément(s) :

Lire la vidéo du manuel concernant les sommes particulières des suites (arithmétiques et géométriques) : « Suites particulières - Sommes particulières ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Calculer la somme des termes d'une suite géométrique ».

Complément(s) :

Lire l'exercice résolu 3 p. 15 : « Calculer une somme de termes ».

Exercice(s) :

Faire les exercices 32 et 33 p. 32.