Chapitre 4
Applications de la dérivation

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Déterminer les variations d'une fonction	21, 22, 46, 50 et 51 p.162		
Déterminer l'existence d'un extremum local	31 et 34 p. 162		
Résoudre des problèmes d'optimisation			

Travaux Dirigés :

- TD 4 : Etude d'une fonction de degré 3.
- TD 5 : Optimisation.

Démonstrations exemplaires :

- Equation de la tangente

Introduction

Joseph-Louis LAGRANGE (Turin 1736 à Paris 1813), est un passionné d'astronomie et de mathématiques suite à la lecture d'un mémoire de Edmund HALLEY. Lors de la Révolution Française, il fait parti de la réforme des systèmes de poids et mesures et établit le système métrique. En mathématiques, il travaille sur la résolution algébrique des équations et les fonctions (la dérivation notamment). En physique, il publie des travaux concernant l'astronomie (la lune, trajectoires de comètes et satellites de Jupiter).

Leonhard EULER (Bale 1707 à St Pétersbourg 1783) est un génie des mathématiques qui traite, dans son ouvrage *Introduction complète à l'algèbre*, de tous les domaines : la théorie des nombres, le calcul des probabilités, le calcul différentiel, la géométrie, l'analyse. C'est le premier mathématicien à définir clairement une fonction comme une expression dépendant d'une variable. Il introduit aussi des symboles nouveaux : la notation π pour la circonférence d'un cercle, les notations cos, sin, ...

I. Retour sur les tangentes

Définition 4.1 : de la tangente à une courbe

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 4.2 :

L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration exemplaire 4.3 :

Soit $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
Le coeffcient directeur de cette tangente $\mathcal{T}$ est $f'(a)$.
Ainsi une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est :

$$y = f'(a)x + p \quad (p \in \mathbb{R}).$$

Or $A(a; f(a)) \in \mathcal{T}$ donc, on a :

$$f(a) = f'(a)a + p.$$

On trouve alors :

$$p = f(a) - f'(a)a.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} & y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \\ \iff & y = f'(a)(x-a) + f(a). \end{aligned}$$

L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donc :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$\square$

II. Variations d'une fonction

1. Signe de la dérivée d'une fonction monotone

Théorème 4.4 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée, alors :
- si f est croissante sur I alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$;
- si f est décroissante sur I alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$;
- si f est constante sur I alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Remarque 4.5 :

La démonstration suivante utilise le résultat suivant :
On considère une fonction f définie sur I avec $a \in I$.
Si $f(x) \geq 0$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$ alors $l \geq 0$.

Démonstration 4.6 :

On considère une fonction f décroissante sur I et dérivable sur cet intervalle.
Soit x un élément de I et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$.
On distingue deux cas (selon le signe de h) :
- Si $h < 0$: on a alors $x + h < x$.
  Comme f est décroissante sur I, on a :
$$\begin{aligned} f(x+h) \geq f(x) &\iff f(x+h) - f(x) \geq 0 \\ &\iff \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0. \end{aligned}$$
- Si $h > 0$: on a alors $x + h > x$.
  Comme f est décroissante sur I, on a :
$$\begin{aligned} f(x+h) \leq f(x) &\iff f(x+h) - f(x) \leq 0 \\ &\iff \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $h \neq 0$, on a :
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0$$
Or f est dérivable donc on a :
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$
Ainsi, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \leq 0$. Finalement, si f est décroissante sur I alors, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) \leq 0$.
On démontre, par le même procédé, les deux autres résultats (pour f croissante sur I et f constante sur I). □

2. Principe de Lagrange

Théorème 4.7 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable sur cet intervalle alors :

- si pour tout x dans I $f'(x) < 0$, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I ;
- si pour tout x dans I $f'(x) > 0$, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I ;
- si pour tout x dans I $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Méthodologie 4.8 : ***Etudier les variations d'une fonction***

Pour étudier une fonction f sur un intervalle I, on procède de la manière suivante :

1. on dérive la fonction f (après s'être assuré de sa dérivabilité) ;
2. on étudie le signe de $f'(x)$ sur I ;
3. on en déduit les variations de f sur I.

Exemple 4.9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2$$

Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

III. Extrema d'une fonction

Définition 4.10 : ***d'un extremum***

Un extremum est soit un maximum soit un minimum.

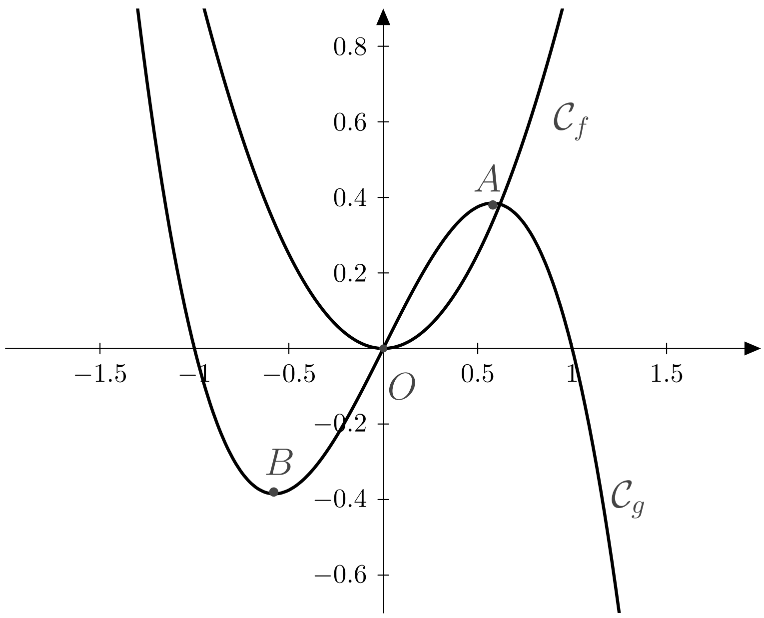
Définition 4.11 : ***d'un extremum local et global***

On distingue deux cas d'extrema :

1. *Les extrema absolus* (ou *globaux*).
   (a) On dit qu'une fonction f admet *un maximum global* sur I en $a \in I$ lorsque pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq f(a)$.
   (b) On dit qu'une fonction f admet *un minimum global* sur I en $a \in I$ lorsque pour tout $x \in I$ on a $f(a) \leq f(x)$.
2. *Les extrema locaux.*
   (a) On dit que f admet *un maximum local*, s'il existe un intervalle ouvert J centré en a (de la forme $]a-h; a+h[$ avec $h > 0$) tel que $J \subset I$ et, pour tout $x \in J$, on ait $f(x) \leq f(a)$.
   (b) On dit que f admet *un minimum local*, s'il existe un intervalle ouvert J centré en a (de la forme $]a-h; a+h[$ avec $h > 0$) tel que $J \subset I$ et, pour tout $x \in J$, on ait $f(a) \leq f(x)$.

Exemple 4.12 :

1. La fonction carré $f : x \longmapsto x^2$ possède un minimum (global) sur $\mathbb{R}$ qui est 0 atteint pour $x = 0$ (c'est aussi un minimum local).
2. La fonction $g : x \longmapsto x(1 - x^2)$ admet un minimum local (l'ordonnée du point B) et un maximum local (l'ordonnée du point A) mais pas d'extrema globaux sur $\mathbb{R}$.



Propriété 4.13 :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I ouvert. Si f admet un extremum local en $a \in I$ alors $f'(a) = 0$.

Remarque 4.14 :

1. Cette condition est dite nécessaire : il est nécessaire que, pour avoir un extremum local, on ait un nombre dérivé nul. Elle n'est cependant pas suffisante.
   La réciproque est fausse.
   Prenons pour exemple la fonction $f : x \longmapsto x^3$, sa fonction dérivée est $x \longmapsto x^2$. Elle s'annule en 0 sans changer de signe, il n'y a donc pas d'extremum en 0 pour la fonction cube :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Var f					

2. Graphiquement, cela se traduit par une tangente horizontale (parallèle à l'axe des abscisses) au point d'abscisse a.

Propriété 4.15 :

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I ouvert et soit a dans I. Si la dérivée f' s'annule en a (i.e. $f'(a) = 0$) en changeant de signe alors f admet un extremum local en a : $f(a)$.

Remarque 4.16 :

Cette condition est dite suffisante : Pour avoir un extremum local, il suffit d'avoir un nombre dérivé nul et un changement de signe de la fonction dérivée.

Exemple 4.17 :

Déterminer le minimum et le maximum de la fonction k définie sur $[-1; 3]$ par :

$$k(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1.$$