Chapitre 8
Variables Aléatoires

I. Rappels de Seconde

1. Vocabulaire des événements

Définition 8.1 : ***d'une expérience aléatoire***

Une expérience aléatoire est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes :
- elle comporte plusieurs issues envisageables ;
- on ne peut prévoir l'issue lorsqu'on réalise l'expérience.

Définition 8.2 : ***de l'univers***

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues de cette expérience.
Autrement dit, si e_1, e_2, ..., e_n sont les issues de l'expérience aléatoire, on a l'univers Ω :

$$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Définition 8.3 : ***d'événement élémentaire***

Un événement élémentaire est une partie de l'univers composé d'un seul élément.
L'univers est l'ensemble de tous les événements élémentaires.

Définition 8.4 : ***d'un événement***

Un événement est une partie de l'univers qui est composé d'un ou plusieurs éléments de l'univers.
Il est donc composé d'un ou plusieurs événements élémentaires.

Exemple 8.5 :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'univers de cette expérience est l'ensemble de nombres de 1 à 6, ainsi, en notant l'univers Ω, on a :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Cette expérience est composée de 6 événements élémentaires : les nombres entiers de 1 à 6.
En notant A, l'événement « Obtenir au moins un trois », on a :

$$A = \{3; 4; 5; 6\}.$$

L'événement A n'est donc pas un événement élémentaire.

2. Le cas de l'équiprobabilité

Définition 8.6 : ***d'une expérience équiprobable***

Lorsque, dans une expérience, toutes les issues ont la même probabilité, on dit que que *l'expérience est équiprobable.*

Définition 8.7 : ***du cardinal d'un événement***

Le cardinal d'un événement A est le nombre d'événements élémentaires appartenant à A.
On note $\text{Card}(A)$.

Exemple 8.8 :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
En notant A, l'événement « Obtenir au moins un trois », on a :

$$A = \{3; 4; 5; 6\}.$$

On a alors $\text{Card}(A) = 4$.

Propriété 8.9 :

On considère $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, l'univers d'une expérience équiprobable.
On a :

- la probabilité de chaque événement élémentaire est $\dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire que, pour tout $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$, on a :
$$P(e_i) = \frac{1}{n}.$$
- On a :
$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{n}.$$

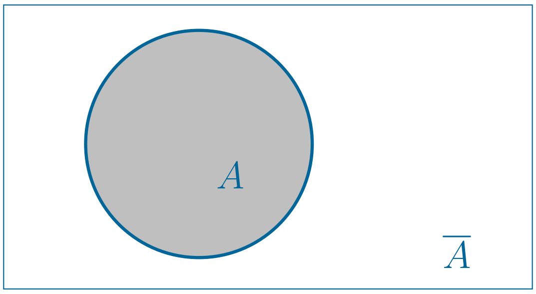
3. L'événement contraire

Définition 8.10 : ***de l'événement contraire***

On appelle *événement contraire* d'un événement A, l'événement noté $\overline{A}$ qui contient l'ensemble des événements élémentaires n'appartenant pas à A.

Autrement dit, pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$x \in \overline{A} \iff x \notin A.$$



Propriété 8.11 :

On considère un événement A et $\overline{A}$ son événement contraire, alors :

$$P\left(\overline{A}\right) + P(A) = 1.$$

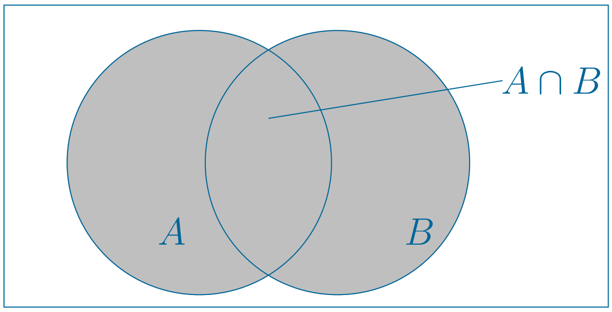
4. La réunion et l'intersection de deux événements

Définition 8.12 : ***de l'intersection de deux événements***

L'événement "A et B", noté $A \cap B$, s'appelle *l'intersection des événements A et B.*

Autrement dit, pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$x \in A \cap B \iff x \in A \quad \text{et} \quad x \in B.$$

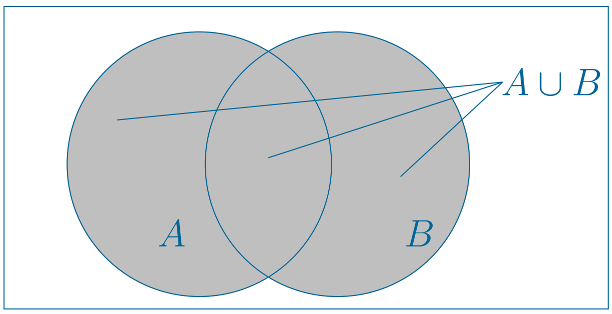


Définition 8.13 : ***de la réunion de deux événements***

L'événement "A ou B", noté $A \cup B$, s'appelle la réunion des événements A et B.

Autrement dit, pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B.$$



Remarque 8.14 :

Deux événements A et B vérifiant $A \cap B = \emptyset$ sont dit *incompatibles.*

Propriété 8.15 :

On considère deux événements A et B, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemple 8.16 :

Enoncé :

On résume les résultats du devoir commun de mathématiques de la classe dans le tableau suivant :

	Fille	Garçon	Total
≥ 15	3	7	10
< 15	12	8	20
Total	15	15	30

On choisit au hasard un élève de la classe.
Calculer la probabilité de choisir une fille ou un élève ayant eu une note supérieure ou égale à 15.

Réponse :

On considère les événements suivants :
- A : « Choisir une fille » ;
- B : « Choisir un élève ayant eu plus de 15 au devoir commun ».

D'après le tableau à double entrée :
- Il y a 15 filles sur 30 élèves dans la classe, on a donc :
$$P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$
- Il y a 10 élèves ayant eu une note supérieure à 15 à ce devoir commun sur 30 élèves dans la classe, on a donc :
$$P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$
- $A \cap B$ est l'événement : « Choisir une fille ayant plus de 15 à son devoir commun de mathématiques ». Il y a 3 filles ayant 15 ou plus à son devoir commun de mathématiques sur les 30 élèves de la classe, on a donc :
$$P(A \cap B) = \frac{3}{30} = \frac{1}{3}.$$

On cherche $P(A \cup B)$, et donc on a :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{3}{30} \\ &= \frac{22}{30} \\ &= \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

La probabilité de choisir une fille de la classe ou un élève ayant eu au moins 15 à son devoir commun est de $\frac{11}{15}$.