II. Les suites géométriques

Exercice(s) :

Faire les exercices 48 et 49 p. 31/34.

Propriété 9.24 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q et soit u_0 son premier terme.
Le sens de variations de la suite (u_n) dépend de la raison géométrique q ainsi que de son premier terme u_0.

1. Si $q > 1$ alors on distingue deux sous cas :
   (a) Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est alors croissante.
   (b) Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est alors décroissante.
2. Si $q = 1$, la suite est alors constante.
3. Si $0 < q < 1$ alors on distingue deux sous cas :
   (a) Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est alors croissante.
   (b) Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est alors décroissante.
4. Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

Complément(s) :

Voir l'exercice résolu 3 p. 17 « Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique ».
On s'intéresse ici uniquement à la suite (v_n).

Complément(s) :

Lire la vidéo « Déterminer la variation d'une suite géométrique ».

Exercice(s) :

Faire les exercices 43 et 44 p. 33.

Complément(s) :

Lire la vidéo du manuel « Suites particulières - Suites Géométriques ».
Elle résume l'ensemble des propriétés et définitions vues précédemment.

Démonstration 9.25 :

NOn considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q et soit u_0 son premier terme.
On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 q^{n+1} - u_0 q^n \\ &= u_0 q^n (q-1). \end{aligned}$$

On cherche donc a étudier le signe de la dernière égalité.

1. Si $q > 1$, alors $q^n > 0$ et $1 - q > 0$.
   Le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne va dépendre que du signe de u_0.
   Il reste donc à connaitre le signe de u_0.
   (a) Si $u_0 > 0$ alors $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q-1) > 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.
   (b) Si $u_0 < 0$ alors $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q-1) < 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.
2. Si $q = 1$ alors $1 - q = 0$ et donc $u_{n+1} - u_n = 0$ et la suite (u_n) est constante.
3. Si $0 < q < 1$, alors $q^n > 0$ et $1 - q < 0$.
   Le signe de $u_{n+1} - u_n$ sera alors du signe opposé de u_0.
   Il reste donc à connaitre le signe de u_0.
   (a) Si $u_0 > 0$ alors $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q-1) < 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.
   (b) Si $u_0 < 0$ alors $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q-1) > 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.
4. On distingue deux sous cas :
   - lorsque n est pair, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, on a :

     $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 q^n (q-1) \\ &= u_0 q^{2p} (q-1). \end{aligned}$$

     Ainsi, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe contraire de celui de son premier terme u_0 puisque $q - 1 < 0$ et $q^{2p} = (q^p)^2 > 0$.
   - lorsque n est impair, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$, on a :

     $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 q^n (q-1) \\ &= u_0 q^{2p+1} (q-1) \\ &= u_0 q^{2p} q (q-1). \end{aligned}$$

     Ainsi, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le même que celui de son premier terme u_0 puisque $q - 1 < 0$, $q^{2p} = (q^p)^2 > 0$ et $q < 0$.

   Ainsi, le signe de $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant et donc la suite ne peut être monotone.

□