Chapitre 9
Suites de référence

I. Les suites arithmétiques

Définition 9.1 : ***d'une suite arithmétique***

On considère une partie infinie de $\mathbb{N}$, notée I.
Une suite $(u_n)_{n \in I}$ *est dite arithmétique* si et seulement si il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in I$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Ainsi, lorsque $I = \mathbb{N}$, on a :

$$u_0 \xrightarrow{+\,\mathrm{r}} u_1 \xrightarrow{+\,\mathrm{r}} u_2 \quad \ldots \quad u_n \xrightarrow{+\,\mathrm{r}} u_{n+1} \quad \cdots$$

r est appelée *la raison arithmétique* de la suite $(u_n)_{n \in I}$.

Méthodologie 9.2 : ***Démontrer qu'une suite est arithmétique ou non***

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique on procède de la manière suivante :

1. On calcule u_{n+1}
2. On calcule $u_{n+1} - u_n$
3. - si le résultat de $u_{n+1} - u_n$ est constant à r (ne dépend pas de n), on conclut que la suite est arithmétique de raison r.
   - si le résultat de $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant à r, alors on conclut que la suite n'est pas arithmétique en illustrant par le calcul de plusieurs termes.

Complément(s) :

Voir l'exercice résolu 1 page 13 « Reconnaitre une suite arithmétique ».

Exercice(s) :

Faire les exercices 16 et 17 p. 31.

Exemple 9.3 :

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = 3n - 2$.
Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
On va alors montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est constante.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - (3n-2) \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + 3$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison $r = 3$.

Propriété 9.4 :

Le sens de variation d'une suite arithmétique de raison r est donné par le signe de la raison :
- Si $r > 0$, la suite est alors croissante.
- Si $r < 0$, la suite est alors décroissante.
- Si $r = 0$, la suite est alors stationnaire.

Démonstration 9.5 :

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r.$$

On distingue alors 3 cas :
- Si $r > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0$ donc $u_{n+1} = u_n$ et la suite (u_n) est constante (stationnaire).
- Si $r < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

$\square$

Complément(s) :

Voir l'exercice résolu 3 p. 17 « Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique ».
On s'intéresse ici uniquement à la suite (u_n), la suite (v_n) sera étudiée ultérieurement.

Exercice(s) :

Faire l'exercice 42 p. 33