Chapitre 6
Limites des Fonctions

Sommaire

I. Limite d'une fonction à l'infini. **2**
1. Limite finie en $\pm\infty$. 2
2. Limite infinie en $\pm\infty$ 4

II. Limite d'une fonction en réel a. **5**
1. Limite finie en a 5
2. Limite infinie en a 6

III. Opérations sur les limites **7**
1. La limite d'une somme 7
2. La limite d'un produit 8
3. La limite d'un inverse 9
4. Limite d'un quotient 9
5. Limite des polynômes et des fonctions rationnelles. 10
6. Limite d'une composée. 11

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Déterminer la limite d'une fonction par somme, produit, quotient, composée, ...	18, 19, 26, 27, 38 p. 181		
Déterminer la limite d'une fonction par comparaison	43 et 44 p. 183		
Interpréter graphiquement des limites	26 et 28 p.181		

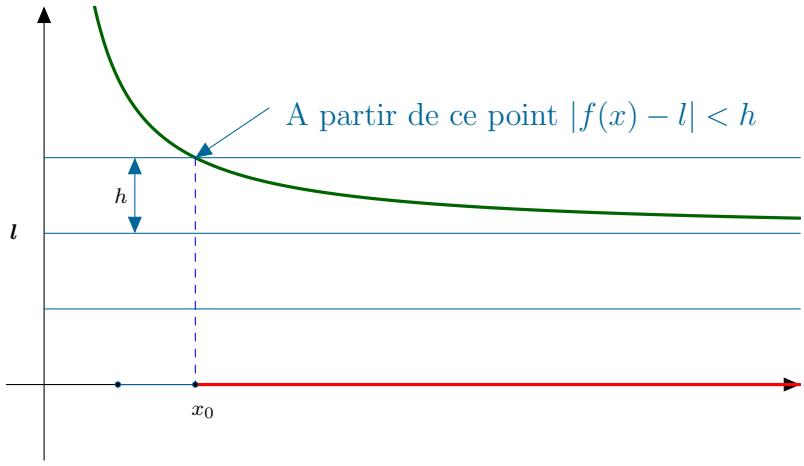
I. Limite d'une fonction à l'infini.

1. Limite finie en $\pm\infty$.

Définition 6.1 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite l lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand.
On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$



Autrement dit, pour un $h > 0$ (fixé), il existe x_0 tel que si $x > x_0$, $|f(x) - l| < h$.

Exemple 6.2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. On pose $h > 0$. Résoudre $|f(x)| < h$.
2. Conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Définition 6.3 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a[$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite l lorsque x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les $f(x)$ dès que x est assez grand valeur absolue et négatif .
On note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

Autrement dit, pour un $h > 0$ (fixé), il existe x_0 tel que si $x < x_0$, $|f(x) - l| < h$.

Exemple 6.4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{-*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

1. Résoudre $|f(x) - 2| < 10$ et $|f(x) - 2| < h$ pour $h > 0$.
2. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

Définition 6.5 :

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Exemple 6.6 :

En reprenant les deux derniers exemples, donner les équations des asymptotes horizontales à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Théorème 6.7 : ***Théorème des Gendarmes***

On considère trois fonctions f, g et h définies sur $]a; +\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout $x \in]a; +\infty[$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = l$$

Remarque 6.8 :

On peut énoncer le même résultat lorsque les trois fonctions sont définies sur l'intervalle $]-\infty; a[$ et que les limites sont considérées lorsque x tend vers $-\infty$.

Exemple 6.9 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\frac{1}{4x} \leq f(x) + 3 \leq \frac{1}{x}.$$

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. Limite infinie en $\pm\infty$

Définition 6.10 :

Une fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}^+$, il existe un réel x_0 à partir duquel toutes les valeurs de $f(x)$ sont plus grandes que M (i.e. tel que pour tout $x \geq x_0$ on a $f(x) \geq M$).
On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même, une fonction f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque pour tout $m \in \mathbb{R}^+$, il existe un réel x_0 à partir duquel toutes les valeurs de $f(x)$ sont plus petites que m (i.e. tel que pour tout $x \geq x_0$ on a $f(x) \leq m$).
On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Remarque 6.11 :

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f n'est pas majorée.
De même, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, la fonction f n'est par minorée.
De plus, on pourrait énoncer des définitions équivalentes pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Propriété 6.12 :

On a

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$

Propriété 6.13 :

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Exemple 6.14 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Résoudre $f(x) > M$ pour tout $M \in \mathbb{R}^{+*}$.

Théorème 6.15 : ***Théorème de comparaison***

On considère deux fonctions f et g définies sur $]a; +\infty[$ telles que pour tout $x \in]a; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors :

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque 6.16 :

On a les mêmes propriétés lorsque x tend vers $-\infty$.

Exemple 6.17 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^2+1}}.$$

Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

II. Limite d'une fonction en réel a.

1. Limite finie en a

Définition 6.18 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I contenant le réel a.
On dit que f a pour limite le réel l en a (ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a) lorsque $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi proches que l'on veut de l dès que x est suffisamment proche de a.
Dans ce cas, on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Exemple 6.19 :

On considère une fonction f dont on donne le tableau de valeurs suivants :

x tend vers 1 $\longrightarrow$

x	$0,09$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$
$f(x)$	$1,2$	$1,41$	$1,48$	$1,49$	$1,49999$

$\longrightarrow$ $f(x)$ tend vers $1,5$

D'après ce tableau de valeurs, on peut voir que lorsque x tend vers 1, l'image de x par la fonction f tend vers $1,5$.
En effet, on peut dire que la limite de la fonction f lorsque x tend vers 1 est $1,5$ et on pourra écrire

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1,5.$$

Propriété 6.20 :

On a :

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}x^n=0.$$

De plus, si on considère une fonction f, on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

Ou encore :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

Exemple 6.21 :

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

2. Limite infinie en a

Définition 6.22 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I contenant le réel a.

1. On dit que f *a pour limite* $+\infty$ *en* a (ou que $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* a) lorsque pour tout $M>0$ et x est suffisamment proche de a, on a $f(x)>M$.
   Dans ce cas, on note :
   $$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty.$$
2. On dit que f *a pour limite* $-\infty$ *en* a (ou que $f(x)$ *tend vers* $-\infty$ *lorsque* x *tend vers* a) lorsque pour tout $M<0$ et x est suffisamment proche de a, on a $f(x)<M$.
   Dans ce cas, on note :
   $$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty.$$

Exemple 6.23 :

On considère une fonction g dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x tend vers 0 $\longleftarrow$

x	$0,0001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$	$0,2$
$g(x)$	10^8	$127\,968$	1048	150	12

$\longleftarrow$ $f(x)$ tend vers $+\infty$

Ici, lorsque x tend vers 0, l'image de x par f ne cesse de prendre des valeurs de plus en plus grande, on dira que $f(x)$ tend vers $+\infty$.
Dans ce cas, on peut écrire :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty.$$

Définition 6.24 :

Si la fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

III. Opérations sur les limites

Dans les sous-parties qui suivent, on suppose que les fonctions f et g admettent une limite en α.
α désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, l et l' sont deux réels.

1. La limite d'une somme

Propriété 6.25 :

On considère deux fonctions f et g.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + g(x) =$	$l + l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	F.I.

Exemple 6.26 :

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x$.

2. La limite d'un produit

Propriété 6.27 :

On considère deux fonctions f et g.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	l'	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) =$	ll'	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

Exemple 6.28 :

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$.

Propriété 6.29 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ pair} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ impair}$$

Démonstration :

On démontre ces trois résultats par récurrence sur n.

1. Initialisation : Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ la propriété est vaire au rang 1.
2. Hérédité : On suppose qu'on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ pair} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ impair}$$

   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^{n+1} = x \times x^n$ et si n et impair ont des parités inverses.
   Ainsi, par les propriétés des produits de limite, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n+1} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{n+1} = +\infty \text{ si } n+1 \text{ pair} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^{n+1} = -\infty \text{ si } n+1 \text{ impair}$$

3. Conclusion : la propriété est vraie au rang 1 et elle est hérédiataire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. La limite d'un inverse

Propriété 6.31 :

On considère une fonction f.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$0^{\pm}$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)} =$	$\dfrac{1}{l'}$	0^{+}	0^{-}	$\pm\infty$

Exemple 6.32 :

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3-\dfrac{1}{x}}$

4. Limite d'un quotient

Propriété 6.33 :

On considère deux fonctions f et g.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	l	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$l' \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{l}{l'}$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	F.I.

Exemple 6.34 :

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x}+3}{x^2-1}$.

5. Limite des polynômes et des fonctions rationnelles.

Propriété 6.35 :

On considère une fonction polynôme f, i.e. une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, alors :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n.$$

Autrement dit, la limite d'un polynôme en $+\infty$ et $-\infty$ ne dépend que de son terme de plus haut degré.

Remarque 6.36 :

Dans la pratique, on tombe la plupart du temps sur une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$.
Pour calculer la limite d'un polynôme, on factorisera le polynôme par x^n avant d'appliquer les règles concernant la limite d'un produit.

Exemple 6.37 :

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 7x + 1$.

Propriété 6.38 :

On considère une fonction rationnelle f, i.e. un quotient de deux fonctions polynômes telle que $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$, alors :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Autrement dit, la limite d'une fonctionr rationnelle en $+\infty$ et $-\infty$ ne dépend que des termes de plus haut degré (celui du numérateur et celui du dénominateur).

Remarque 6.39 :

Dans la pratique, on tombe la plupart du temps sur une forme indéterminée de la forme $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
Pour calculer la limite d'une fonction rationnelle, on factorisera le numérateur par x^n et le dénominateur par x^m, puis on simplifiera $\dfrac{x^n}{x^m}$ avant d'appliquer les règles concernant la limite d'un produit et/ou quotient.

Exemple 6.40 :

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - 7x + 1}{4x^4 - 1}$.

6. Limite d'une composée.

Définition 6.41 :

On considère deux fonctions f et g telles que f est définie sur I et g définie sur $f(I)$. On peut alors définir la fonction h, composée de g par f et notée $h = g \circ f$, définie sur I par :

$$h(x) = g \circ f(x) = g\left(f(x)\right).$$

Exemple 6.42 :

On considère les fonctions f et g définies par $g(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et par $f(x) = 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Donner le domaine de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Exprimer en fonction de x, $g \circ f$ et $f \circ g$.

Théorème 6.43 :

On considère deux fonctions f et g vérifiant :

- $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$;
- $\lim\limits_{X \to \beta} g(X) = \gamma$.

Alors

$$\lim_{x \to \alpha} g \circ f(x) = \gamma.$$

Exemple 6.44 :

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x + 2}$.

Théorème 6.45 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et soit (u_n) une suite dont tous les termes u_n appartiennent à I.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = b$.

Exemple 6.46 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par :

$$u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$$

On admet que cette suite converge vers une limite réelle l positive.
Déterminer cette limite.