1. (a) Comme la suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 q^n.$$

Ainsi, on obtient :

$$u_{n+1} = u_0 q^{n+1} \quad \text{et} \quad u_{n+2} = u_0 q^{n+2}.$$

/1 point

De plus, comme la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n &\iff u_0 q^{n+2} = u_0 q^{n+1} + u_0 q^n \\ &\iff u_0 q^{n+2} - u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = 0 \\ &\iff u_0 q^n (1 - q - q^2) = 0 \\ &\iff u_0 q^n (q^2 - q - 1) = 0. \end{aligned}$$

/1,5 point

(b) D'après l'égalité précédente, on a :

$$u_0 q^n (q^2 - q - 1) = 0 \iff u_0 = 0 \quad \text{ou} \quad q = 0 \quad \text{ou} \quad q^2 - q - 1 = 0.$$

/0,5 point

Etudions chacun des trois cas :

— Si $u_0 = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 0 \times q^n = 0$ et la suite (u_n) est la suite nulle. ***/0,5 point***

— Si $q = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 0$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Ainsi, pour $n = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_2 = u_1 + u_0 &\iff 0 = 0 + u_0 \\ &\iff u_0 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est la suite nulle. ***/1 point***

— Si $q^2 - q - 1 = 0$. On cherche les valeurs de q possible en résolvant une équation du second degré.
Soit Δ, le discriminant de l'équation $q^2 - q - 1 = 0$.
On a :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ &= 1 + 4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Ainsi, $q^2 - q - 1 = 0$ admet deux solutions :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ &= \phi' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \phi \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ***1 pt***

Finalement,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est la suite nulle ou une suite géométrique de raison } \phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

2. (a)

On a :

$$z_2 = z_0 + z_1 = 1$$

On a :

$$z_3 = z_2 + z_1 = 2$$

On a :

$$z_4 = z_3 + z_2 = 3$$

On a :

$$z_5 = z_4 + z_3 = 5$$

On a :

$$z_6 = z_5 + z_4 = 8$$

2,5 pts

(b) Pour $n = 0$, on a :

$$z_0 = a + b \iff 0 = a + b \qquad \textit{\textbf{0,5 pt}}$$

Pour $n = 1$, on a :

$$z_1 = a\phi + b\phi' \iff 1 = a\phi + b\phi' \qquad \textit{\textbf{0,5 pt}}$$

On résout alors le système suivant :

$$\begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = a\phi + b\phi' \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ 1 = -b\phi + b\phi' \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = -b \\ 1 = b(-\phi + \phi') \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = -b \\ 1 = -b\sqrt{5} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ b = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \qquad \textit{\textbf{1 pt}}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{z_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\phi^n - \phi'^n\right).}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{z_{n+1}}{z_n} &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\phi^{n+1} - \phi'^{n+1}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\phi^n - \phi'^n\right)} \\
&= \frac{\phi^{n+1} - \phi'^{n+1}}{\phi^n - \phi'^n} \\
&= \frac{\phi^{n+1}\left(1 - \dfrac{\phi'^{n+1}}{\phi^{n+1}}\right)}{\phi^n\left(1 - \dfrac{\phi'^n}{\phi^n}\right)} \\
&= \phi \frac{1 - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^n}.
\end{aligned} \qquad \textit{\textbf{2 pts}}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\frac{z_{n+1}}{z_n} = \phi \frac{1 - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^n}.}$$

(d) On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\phi'}{\phi}\right| &= \left|\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right| \\ &= \left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| \\ &= \left|\frac{1-5}{(1+\sqrt{5})^2}\right| \\ &= \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2} < 1. \qquad \textit{\textbf{1,5 pt}}\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^n = 0$ et, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^n = 1$.
De même, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^{n+1} = 0$ et, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^{n+1} = 1$.
Ainsi, par quotient, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n} = \phi.} \qquad \textit{\textbf{1,5 pt}}$$

3. On considère la propriété définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = z_{n+2} - 1. \qquad \textit{\textbf{0,5 pt}}$$

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$z_0 + z_1 = z_2 \iff z_0 = z_2 - z_1 \iff z_0 = z_2 - 1.$$

Ainsi, la propriéété est vraie au rang $n = 0$. ***0,5 pt***

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\sum\limits_{k=0}^{n} z_k = z_{n+2} - 1$.

On démontre que $\sum\limits_{k=0}^{n+1} z_k = z_{n+3} - 1$.

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} z_k &= \sum_{k=0}^{n} z_k + z_{n+1} \\ &= z_{n+2} - 1 + z_{n+1} \\ &= z_{n+3} - 1 \qquad \text{car } z_{n+3} = z_{n+2} + z_{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire. ***1 pt***

— Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} z_k = z_{n+2} - 1.} \qquad \textit{\textbf{0,5 pt}}$$