

Exercice 1 : (2 points)

1. Un concessionnaire propose deux options sur les voitures qu'il vend : la peinture métallisée (événement M) et l'autoradio Bluetooth (événement B). $\overline{M \cup B}$ est l'événement :

(a) « La voiture n'a pas d'option » ;

(b) « La voiture n'a pas l'option M ou n'a pas l'option B » ;

(c) « La voiture n'a ni l'option M ni l'option B » ;

(d) « Soit la voiture n'a pas l'option M , soit elle n'a pas l'option B ». /1 point

2. Un élève répond au hasard aux 5 questions d'un QCM. Chaque proposition du test propose trois réponses dont une seule est juste. On appelle A l'événement : « L'élève a 5 réponses justes ».

(a) $P(A) = \frac{1}{5}$;

(b) $P(A) = \frac{5}{3}$;

(c) $P(A) = \frac{1}{15}$;

(d) $P(A) = \frac{1}{243}$.

/1 point

Exercice 2 : (5 points)

1. (a)

i	X	1	2	3	4	5
u	5700	5486	5268	5047	4823	4595

/1 point

(b) A la fin de l'exécution de cet algorithme, il affiche 4595.

/0,5 point

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 20\,000 \\ &= 1,015u_n - 300 - 20\,000 \\ &= 1,015(v_n + 20\,000) - 20\,300 \\ &= 1,015 + 20\,300 - 20\,300 \\ &= 1,015 \times v_n. \end{aligned}$$

/1,5 point

(b) On a :

$$\begin{aligned} v_0 &= 5700 - 20\,000 \\ &= -14\,300. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,015$ et de premier terme $v_0 = -14\,300$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = -14\,300 \times 1,015^n.$$

/1 point

De plus, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 20\,000 \\ &= 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n.$$

/1 point

Exercice 3 : (4 points)

1. On a :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 1^2 + 2^2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ &= 14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \\ &= 30. \end{aligned}$$

/1 point

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= S_n + (n+1)^2. \end{aligned}$$

/1 point

3. On considère la propriété définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

— **Initialisation** : pour $n = 1$, on a :

$$S_1 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1.$$

$$\text{Ainsi, on a } S_1 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

/0,5 point

— **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\text{On démontre que } S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Or } (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6.$$

Ainsi, on a :

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

La propriété est donc héréditaire.

/1 point

— **Conclusion** : la propriété est vraie au rang $n = 1$ et elle est héréditaire à partir de ce rang donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

/0,5 point

Exercice 4 : **(11 points)****Partie A : Etude de la fonction f .**

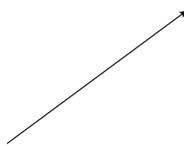
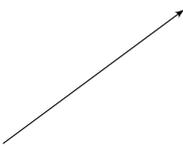
1. La fonction f est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) définie sur $\mathbb{R} \setminus \{6\}$, elle est donc dérivable sur ce même intervalle.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0 \times (6 - x) - 9 \times (-1)}{(6 - x)^2} \\ &= \frac{9}{(6 - x)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$, on a $f'(x) > 0$, ainsi la fonction f est croissante sur l'intervalle $] - \infty; 6[$ et croissante sur l'intervalle $]6; +\infty[$. **/1,5 point**

Ainsi, on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	6	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		+
Variation de f			

/0,5 point

2. Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f avec la droite d'équation $y = x$ revient à étudier le signe de la différence $f(x) - x$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{9}{6 - x} - x \\ &= \frac{9 - x(6 - x)}{6 - x} \\ &= \frac{9 - 6x + x^2}{6 - x} \\ &= \frac{(x - 3)^2}{6 - x}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	3	6	$+\infty$
Signe de $(x - 3)^2$	+	0	+	+
Signe de $6 - x$	+	+	0	-
Signe de $f(x) - x$	+	0	+	-

2. (Suite). Ainsi,

- comme $f(x) - x \geq 0$ sur l'intervalle $] - \infty; 6[$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur ce même intervalle;
- comme $f(x) - x < 0$ sur l'intervalle $]6; +\infty[$, la courbe représentative de la fonction f est strictement au-dessous de la droite d'équation $y = x$.

/2 points

Partie B : Etude d'une suite.

1. On considère la propriété définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n < 3$.

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1 < 3$

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

/0,5 point

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n < 3$. On démontre que $u_{n+1} < 3$.

On a :

$$\begin{aligned} u_n < 3 &\iff -u_n > -3 \\ &\iff 6 - u_n > 3 \\ &\iff \frac{1}{6 - u_n} < \frac{1}{3} \\ &\iff \frac{9}{6 - u_n} < 3 \\ &\iff u_{n+1} < 3. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $u_{n+1} < 3$.

La propriété est donc héréditaire.

/1 point

- **Conclusion** : la propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire à partir de ce rang donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n < 3.$$

/0,5 point

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in] - \infty; 3[$ ($u_n < 3$).

Ainsi, d'après les résultats de la question 2. de la Partie A, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(u_n) - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est donc croissante.

/1 point

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{9 - 3(6 - u_n)}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{6 - u_n}{-3(u_n - 3)} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{3 - u_n}{-3(3 - u_n)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

/1 point

3. (a) (*Suite*). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{3}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{u_0 - 3} \\ &= \frac{1}{1 - 3} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

/0,5 point

Finalement, (v_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$ de premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$.

/0,5 point

(b) Comme (v_n) est une suite arithmétique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3}.$$

/1 point

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{u_n - 3} &\iff v_n(u_n - 3) = 1 \\ &\iff u_n - 3 = \frac{1}{v_n} \\ &\iff u_n = \frac{1}{v_n} + 3. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{n}{3}} + 3.$$

/1 point