Exercice 1 : *(2 points)*

1. Un concessionnaire propose deux options sur les voitures qu'il vend : la peinture métalisée (événement M) et l'autoradio Bluetooth (événement B). $\overline{M \cup B}$ est l'événement :
   (a) $\boxed{\text{« La voiture n'a pas d'option » ;}}$
   (b) « La voiture n'a pas l'option M ou n'a pas l'option B » ;
   (c) $\boxed{\text{« La voiture n'a ni l'option } M \text{ ni l'option } B \text{ » ;}}$
   (d) « Soit la voiture n'a pas l'option M, soit elle n'a pas l'option B ». */1 point*
2. Un élève répond au hasard aux 5 questions d'un QCM. Chaque proposition du test propose trois réponses dont une seule est juste. On appelle A l'événement : « L'élève a 5 réponses justes ».

   (a) $P(A) = \frac{1}{5}$; (b) $P(A) = \frac{5}{3}$; (c) $P(A) = \frac{1}{15}$; (d) $\boxed{P(A) = \frac{1}{243}.}$

   /1 point

Exercice 2 : *(5 points)*

1. (a)

i	X	1	2	3	4	5
u	5700	5486	5268	5047	4823	4595

/1 point

   (b) A la fin de l'exécution de cet algorithme, il affiche 4595. */0,5 point*

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 20\,000 \\ &= 1,015u_n - 300 - 20\,000 \\ &= 1,015(v_n + 20\,000) - 20\,300 \\ &= 1,015 + 20\,300 - 20\,300 \\ &= 1,015 \times v_n. \end{aligned}$$

/1,5 point

   (b) On a :

$$\begin{aligned} v_0 &= 5700 - 20\,000 \\ &= -14\,300. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,015$ et de premier terme $v_0 = -14\,300$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = -14\,300 \times 1,015^n.$$

/1 point

De plus, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 20\,000 \\ &= 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n.$$

/1 point

Exercice 3 : *(4 points)*

1. On a :

$$S_1 = 1^2 = 1. \qquad S_2 = 1^2 + 2^2 = 5. \qquad S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14. \qquad S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

/1 point

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= S_n + (n+1)^2. \end{aligned}$$

/1 point

3. On considère la propriété définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

— **Initialisation :** pour $n = 1$, on a :

$$S_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1.$$

Ainsi, on a $S_1 = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}$.
La propriété est donc vraie au rang $n = 1$. */0,5 point*

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
On démontre que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}. \end{aligned}$$

Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$.
Ainsi, on a :

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

La propriété est donc héréditaire. */1 point*

— **Conclusion :** la propriété est vraie au rang $n = 1$ et elle est héréditaire à partir de ce rang donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

/0,5 point

Exercice 4 : *(11 points)*

Partie A : Etude de la fonction f.

1. La fonction f est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) définie sur $\mathbb{R} \setminus \{6\}$, elle est donc dérivable sur ce même intervalle.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0 \times (6-x) - 9 \times (-1)}{(6-x)^2} \\ &= \frac{9}{(6-x)^2}. \end{aligned}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$, on a $f'(x) > 0$, ainsi la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty; 6[$ et croissante sur l'intervalle $]6; +\infty[$. ***/1,5 point***
   Ainsi, on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		6		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
Variation de f		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

/0,5 point

2. Etudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f avec la droite d'équation $y = x$ revient à étudier le signe de la différence $f(x) - x$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{9}{6-x} - x \\ &= \frac{9 - x(6-x)}{6-x} \\ &= \frac{9 - 6x + x^2}{6-x} \\ &= \frac{(x-3)^2}{6-x}. \end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		3		6		$+\infty$
Signe de $(x-3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $6-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)-x$		$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

2. *(Suite).* Ainsi,
   - comme $f(x) - x \geq 0$ sur l'intervalle $]-\infty; 6[$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur ce même intervalle ;
   - comme $f(x) - x < 0$ sur l'intervalle $]6; +\infty[$, la courbe représentative de la fonction f est strictement au-dessous de la droite d'équation $y = x$. ***/2 points***

Partie B : Etude d'une suite.

1. On considère la propriété définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n < 3$.
   - **Initialisation :** pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1 < 3$
     La propriété est donc vraie au rang $n = 0$. ***/0,5 point***
   - **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n < 3$. On démontre que $u_{n+1} < 3$.
     On a :
     $$\begin{aligned} u_n < 3 &\iff -u_n > 3 \\ &\iff 6 - u_n > 9 \\ &\iff \frac{1}{6 - u_n} < \frac{1}{9} \\ &\iff \frac{9}{6 - u_n} < 1 \\ &\iff u_{n+1} < 1. \end{aligned}$$
     Ainsi, on a $u_{n+1} < 3$.
     La propriété est donc héréditaire. ***/1 point***
   - **Conclusion :** la propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire à partir de ce rang donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
     $$u_n < 3.$$
     /0,5 point

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]-\infty; 3[$ ($u_n < 3$). Ainsi, d'après les résultats de la question 2. de la Partie A, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$f(u_n) - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} - u_n \geq 0.$$
   Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est donc croissante. ***/1 point***

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{\dfrac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{\dfrac{9 - 3(6 - u_n)}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{6 - u_n}{-3(u_n - 3)} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{3 - u_n}{-3(3 - u_n)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$
   /1 point

3. (a) *(Suite).* Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{3}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{u_0 - 3} \\ &= \frac{1}{1-3} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

/0,5 point

Finalement, (v_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$ de premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$. ***/0,5 point***

(b) Comme (v_n) est une suite arithmétique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3}.$$

/1 point

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{u_n - 3} &\iff v_n(u_n - 3) = 1 \\ &\iff u_n - 3 = \frac{1}{v_n} \\ &\iff u_n = \frac{1}{v_n} + 3. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{n}{3}} + 3.$$

/1 point