Chapitre 2
Dérivation

Sommaire

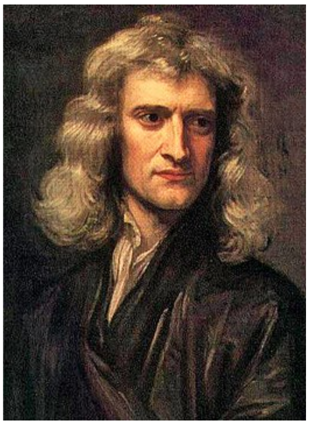
Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Calculer un taux d'accroissement	3 à 5 p. 128 & 36 à 39 p. 132		
Calculer un nombre dérivé	8 à 11 p. 128 & 41 à 43 p. 132		
Déterminer l'équation d'une tangente	18, 19 p. 129 & 22 à 24 p. 130 & 52 et 53 p. 133		
Calculer la dérivée d'une fonction	3 à 8 p. 160 & 42 à 44 p. 164, 59, 60 p. 166, 68 p. 168		

Démonstrations exemplaires :

- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 ;
- Dérivée de la fonction carré ;
- Dérivée de la fonction inverse ;
- Dérivée d'un produit.

Introduction

Gottfried LEIBNIZ (1646 à 1716) est poussé par son père à la lecture ce qui va le pousser à faire des études universitaires en philosophie, en théologie et en droit. Il passe son doctorat de droit en 1666 après quoi il travaille dans la diplomatie où il rencontre HUYGHENS. Ce dernier pousse LEIBNIZ à combler ses lacunes en mathématiques ce qu'il fait. La fin de sa vie est gâchée par la paternité de certaines de ses recherches.



Isaac NEWTON (1642 à 1727) est un enfant médiocre jusqu'en 1660 où il se révèle au collège de Cambridge. Son maitre BARROW lui laisse sa chaire de mathématiques à Cambridge et, tellement impressionné par la qualité de ses travaux, le pousse à publier ses écrits dans *Principia* et le monde scientifique est impressioné par son ouvrage. C'est notamment ave ses travaux sur la mécanique qu'il fait le pont entre les mathématiques et les problèmes physiques. La fin de sa vie est improductive au niveau scientifique : il arrête l'enseignement en 1693 suite à une depression.

Ils sont tous les deux considérés comme les fondateurs du calcul différentiel et intégral. Une controverse les a notamment opposé l'Angleterre et le continent européen pour savoir lequel de ces deux scientifiques a posé les bases de cette nouvelle théorie.

I. Fonction dérivable en un point

1. Nombre dérivé

Définition 2.1 : du taux d'accroissement

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant deux nombres a et b distincts. On appelle *taux d'accroissement de la fonction f entre a et b* le réel t tel que :

$$t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque 2.2 :

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq a$, on peut aussi définir *le taux d'accroissement de la fonction f en a* (ou taux d'accroissement de f entre x et a) par le nombre réel t tel que :

$$t = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Lorsque $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tel que $a + h \in I$, on peut aussi définir *le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a + h$* par le nombre réel t tel que :

$$\begin{aligned} t &= \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Il s'agit de ce taux d'accroissement que nous allons utiliser par la suite.

Exemple 2.3 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et 4.
2. Calculer, en fonction de h, le taux d'accroissement de la fonction f entre 3 et $3 + h$ où h est un réel non nul.

Définition 2.4 : du nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.
On dit que la fonction f *est dérivable en a* si et seulement si le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$, se rapproche d'un nombre réel fini lorsque h tend vers zéro.
Ce nombre est appelé *nombre dérivé de f en a*, on le note $f'(a)$ et on écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarque 2.5 :

On aurait aussi pu définir *le nombre dérivé de f en a* de la manière suivante :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En effet, en posant $x = a + h$ dans le quotient ci-dessus, on a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On retrouve alors le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$.
De plus, dire que « h se rapproche de 0 », c'est-à-dire « $a + h$ se rapproche de a » revient à dire que « x se rapproche de a ».

Application 2.5 : Calcul d'un nombre dérivé

En pratique, lorsqu'on veut calculer un nombre dérivé $f'(a)$, on procède de la manière suivante :

1. On calcule $f(a)$ et $f(a + h)$, où $h \in \mathbb{R}^*$ et $a + h \in D_f$.
2. On calcule et simplifie au maximum le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
3. On fait tendre h vers 0 et on en déduit la limite du taux d'accroissement précédemment calculé. Si le taux d'accroissement est simplifié au maximum, il suffira, en général, de remplacer h par 0 et en déduire $f'(a)$.

Exemple 2.7 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 4$.
Montrer que f est dérivable en 1 et calculons $f'(1)$.

Remarque 2.8 :

Une fonction ne peut être dérivable qu'en un point a où elle est définie.
En revanche, une fonction définie en un point a n'est pas forcément dérivable en ce point.

Démonstration exemplaire :

Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Cette fonction f est bien définie en 0. Nous allons voir que cette dernière n'est pas dérivable en 0 :
Soit $h > 0$. On calcule alors le taux d'accroissement de f entre 0 et $0 + h$:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

On voit que lorsque h tend vers 0, le réel $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand.

h tend vers 0

h	0	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$\frac{1}{\sqrt{h}}$	ERR	316	100	$31,6$	10	$3,2$

$\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$

On note alors :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Cette limite est infinie et donc f n'est pas dérivable en 0.

Remarque 2.10 :

Dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0 : Prenons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|$.
Cette fonction est bien définie en 0.
Nous allons démontrer que cette fonction n'est pas dérivable en 0.
Calculons alors le taux d'accroissement de g entre 0 et $0 + h$:

$$\frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Etudions le résultat de ce taux d'accroissement selon le signe de h :

- Si $h > 0$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \frac{|h|}{h} \\ &= \frac{h}{h} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = 1.$$

- Si $h < 0$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \frac{|h|}{h} \\ &= \frac{-h}{h} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Ainsi,

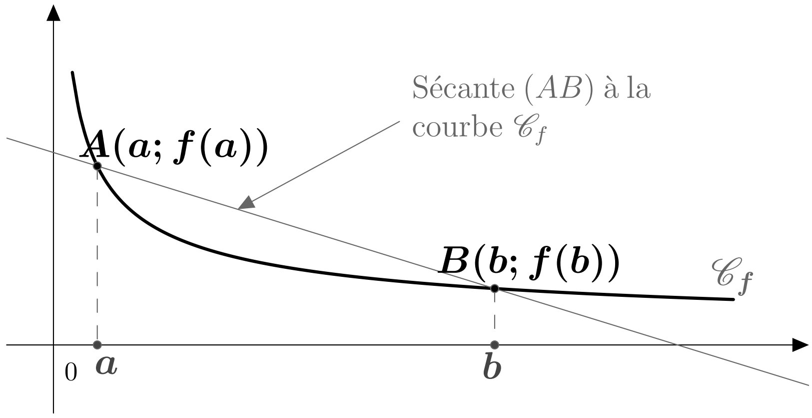
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = -1.$$

Finalement, $\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$ ne peut exister et la fonction g n'est pas dérivable en 0.

2. Interprétation géométrique

Remarque 2.11 :

On considère une fonction f dont on donne sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$.
On place deux A et B d'abscisse respective a et b sur $\mathscr{C}_f$ et on trace la droite (AB).
remiquement, le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b représente le coefficient directeur d'une sécante à la courbe représentative de la fonction f.



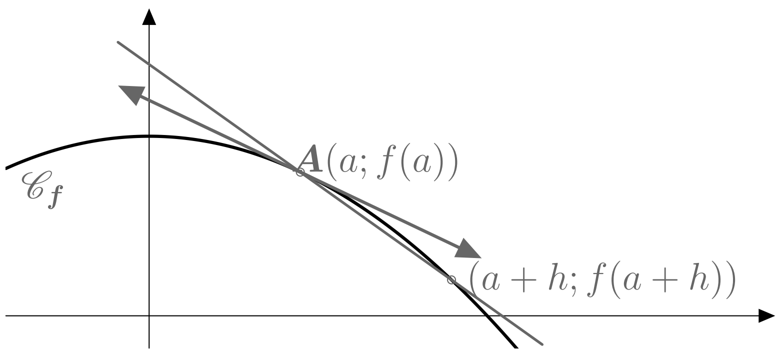
Cette sécante (AB) a bien pour coeffcient directeur $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Définition 2.12 : de la tangente à une courbe

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque 2.13 :

Comme une sécante a pour coeffcient directeur un taux d'accroissement et que le nombre dérivé est un taux d'accroissement limite, on peut définir la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a comme une sécante limite ayant pour coeffcient directeur le nombre dérivé de f en a.



Cette tangente est symbolisée par un segment à double flèche.

Propriété 2.14 :

L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Démonstration :

On considère $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
Le coeffcient directeur de cette tangente $\mathcal{T}$ est $f'(a)$. Ainsi une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est :

$$y = f'(a)x + p \quad (p \in \mathbb{R}).$$

Or $A(a; f(a)) \in \mathcal{T}$ donc, on a :

$$f(a) = f'(a)a + p.$$

On trouve alors :

$$p = f(a) - f'(a)a.$$

Ainsi, on a :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \iff y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ est donc :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

□

Exemple 2.16 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.
Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe représentative de la fonction f.

3. Interprétation en physique

Dans cette partie, on va faire un parallèle entre les notions précédemment observées et leur interprétation physique.
On va alors s'interesser au déplacement d'un mobile M par rapport au temps et donner des illustrations aux notions précédentes.
Pour un temps t, on définit la position du mobile : $d(t)$ appelée loi horaire du mobile.

Définition 2.17 : de vitesse moyenne

On définit la *vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2*, d'un mobile M dont la loi horaire est donnée par la fonction d, comme le nombre réel v tel que :

$$v = \frac{d(t_1) - d(t_2)}{t_1 - t_2}.$$

Remarque 2.18 :

Notons ici le parallèle entre « taux d'accroissement de f entre a et b » et « vitesse moyenne de d entre les instants t_1 et t_2 ».
De la même manière, la vitesse moyenne entre les instants t et $t + h$ est donnée par :

$$v = \frac{d(t + h) - d(t)}{h}.$$

Définition 2.19 : de vitesse instantanée

La vitesse instantanée d'un mobile M à l'instant t dont la loi horaire est donnée par la fonction d est :

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h}.$$

Autrement dit, on a $v(t) = d'(t)$.

Remarque 2.20 :

Notamment en physique, on peut trouver les notations suivantes concernant les notions de nombres dérivés :

$$f'(a) = \frac{df}{dt}(a) = \dot{f}(a).$$

II. Fonction dérivable sur un intervalle

Définition 2.21 : d'une fonction dérivable sur un intervalle

Une fonction f *est dérivable sur un intervalle ouvert I de* $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout point de I (i.e. lorsque pour tout $x \in I$, $f'(x)$ existe).
Ainsi, la fonction qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée de f* et est notée f'.

Exemple 2.22 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et et $h \neq 0$.
Démontrer que la fonction g est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et donner $g'(x)$.

Démonstration exemplaire :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et et $h \neq 0$.
On a :

$$\begin{aligned} g(x+h) &= (x+h)^2 \\ &= h^2 + 2xh + x^2. \end{aligned}$$

Soit t le taux d'accroissement de la fonction f entre x et $x+h$.
On a :

$$\begin{aligned} t &= \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{h^2 + 2xh}{h} \\ &= h + 2x. \end{aligned}$$

De plus, on a $\lim_{h \to 0} h + 2x = 2x$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = 2x$.

Propriété 2.24 :

On considère f une fonction et f' sa fonction dérivée définie sur $D_{f'}$.

$f(x) =$	$f'(x) =$	$D_{f'} =$
k ou $k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \geq 1)$	$n\, x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Démonstration exemplaire :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $h \neq 0$.
On a $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f(x+h) = \dfrac{1}{x+h}$.
Puis, on a :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \\ &= \frac{-h}{x(x+h)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

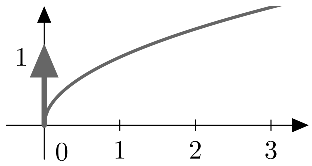
$$\begin{aligned} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} &= \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}x(x+h)} \\ &= \frac{-1}{x(x+h)}. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{x(x+h)} = \dfrac{-1}{x^2}$
Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

Remarque 2.26 :

On a vu que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
En effet, on a $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.
La courbe représentative de la fonction carrée admet donc une demi-tangente verticale en 0.



Remarque 2.27 :

Dorénavant, lorsque l'on voudra calculer un nombre dérivée d'une fonction de référence, il ne sera plus nécessaire de calculer le taux d'accroissement puis sa limite. On appliquera directement, les formules vues précédemment.

Exemple 2.28 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^7$.
Calculer $f'(1)$.

Propriété 2.29 :

Soient deux fonctions u et v définies et dérivables sur un même intervalle ouvert I :

Fonction :	**Dérivée :**	**Conditions :**
$u+v$	$u'+v'$	Aucune
$k.u \quad (k \in \mathbb{R})$	$k.u'$	Aucune
$u.v$	$u'v+v'u$	Aucune
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	Pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	Pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$

Démonstration exemplaire :

On a $(uv)(x) = u(x).v(x)$ et $(uv)(x+h) = u(x+h)v(x+h)$.
On pose $t = u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)$.
On remarque que :

$$\begin{aligned} t &= u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x+h) \\ &= (u(x+h) - u(x))v(x+h) + u(x)(v(x+h) - v(x)). \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} &= \frac{(u(x+h) - u(x))v(x+h) + u(x)(v(x+h) - v(x))}{h} \\ &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}. \end{aligned}$$

Or les fonctions u et v sont dérivables sur I donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x).$$

De plus, on a : $\lim\limits_{h \to 0} v(x+h) = v(x)$.
Ainsi, on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

Finalement, la fonction uv est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, on a :

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Remarque 2.31 :

Lorsqu'on sera amené à dériver une fonction de la forme $\frac{u}{v}$, on laissera le dénominateur $v(x)^2$ sans développer.
En effet, dans le prochain chapitre, on sera amené à étudier le signe de la fonction dérivée. Ainsi, le laisser sous la forme d'un carré nous donne directement le signe du dénominateur.

Propriété 2.32 :

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

Démonstration :

- f fonction polynôme : Il s'agit d'une somme de fonctions de la forme $x \mapsto x^k$ $(k \in \mathbb{N})$ qui sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- f fonction rationnelle : Comme f est le quotient de deux fontions polynômes qui sont dérivables sur le domaine de définition de f, cette fonction f est donc dérivable sur son domaine de définition, d'après le théorème précédent.

$\square$

Exemple 2.34 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{10} + x^3$.
Calculer la fonction dérivée f'.

Application 2.34 : — ***Rédaction pour dériver un produit/quotient/...***

En pratique lorsqu'on voudra dériver une fonction f qui s'écrit sous la forme d'un produit ou d'un quotient, on prendra l'habitude d'utiliser la rédaction suivante :

> La fonction f est du type $\dots$ avec $u(x) = \dots$ et $v(x) = \dots$.
> Pour tout $x \in$ ..., on a donc $u'(x) = \dots$ et $v'(x) = \dots$.
> Ainsi, pour tout $x \in$ ..., on a :
> $$f'(x) = \dots$$

Exemple 2.36 :

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2)(-3x + 5)$.

Remarque 2.37 :

Dans l'exemple précédent, on aurait aussi pu développer f puis dériver. On aurait alors trouver le même résultat.
En effet, en développant f, on a : $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 6x + 10$.
Puis, en dérivant le polynôme obtenu, on retrouve :

$$f'(x) = -9x^2 + 10x - 6.$$

Définition 2.38 : — ***Composée d'une fonction affine***

On considère u une fonction définie sur I et a et b deux nombre réels.
On définit la fonction suivante :

$$f : x \longmapsto ax + b \longmapsto u(ax + b).$$

Cette fonction f est appelée *la composée* de la fonction u par la fonction affine définie par $ax + b$.

Exemple 2.39 :

Exprimer en fonction de x les fonctions f suivantes définies par $f(x) = u(ax + b)$ lorsque :

1. $u(x) = \sqrt{x}$ et $ax + b = 2x + 3$;
2. $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $ax + b = -3x + 7$;
3. $u(x) = x^2 + 6$ et $ax + b = 3x - 1$
4. $u(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x - 9}$ et $ax + b = 3x - 2$.

Propriété 2.40 :

On considère une fonction u définie et dérivable sur I et a et b deux réels tels que $ax + b \in I$.
La fonction $f : x \longmapsto u(ax + b)$ est dérivable sur $D = \{x \in \mathbb{R} : ax + b \in I\}$ et, pour tout $x \in D$, on a :

$$f'(x) = a \cdot u'(ax + b).$$

Exemple 2.41 :

On considère la fonction f définie sur $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

Calculer la dérivée de la fonction f.