

Exercice 1 :

1. La fonction B est du type $\frac{u}{v}$ où $u(x) = -2x + 10\sqrt{x} - 10$ et $v(x) = x$.

Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur $[1; 10]$ et, pour tout $x \in [1; 10]$, on a :

$$u'(x) = -2 + 10 \frac{1}{2\sqrt{x}} = -2 + \frac{5}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad v'(x) = 1.$$

La fonction B est donc dérivable sur $[1; 10]$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas et, pour tout $x \in [1; 10]$, on a :

$$\begin{aligned} B'(x) &= \frac{\left(-2 + \frac{5}{\sqrt{x}}\right)x - (-2x + 10\sqrt{x} - 10)}{x^2} \\ &= \frac{-2x + 5\sqrt{x} + 2x - 10\sqrt{x} + 10}{x^2} \\ &= \frac{-5\sqrt{x} + 10}{x^2} \\ &= \frac{-5(\sqrt{x} - 2)}{x^2}. \end{aligned}$$

Etudions le signe de $\sqrt{x} - 2$ lorsque $x \in [1; 10]$:

— On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 2 = 0 &\iff \sqrt{x} = 2 \\ &\iff x = 4. \end{aligned}$$

— Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction croissante, on a :

$$\sqrt{x} - 2 > 0 \iff x > 4 \quad \text{et} \quad \sqrt{x} - 2 < 0 \iff x < 4.$$

De plus, comme pour tout $x \in [1; 10]$, $x^2 > 0$, alors le signe de B' est donné par le signe contraire de $\sqrt{x} - 2$ (présence du -5 en facteur).

Ainsi, on peut donner le tableau de signes suivant :

x	1	4	10
Signe de $B'(x)$	+	0	−

Ainsi, on en déduit les variations de la fonction B sur $[1; 10]$:

— Pour tout $x \in [1; 4[$, on a $B'(x) > 0$ et la fonction B est alors strictement croissante sur cet intervalle.

— Pour tout $x \in]4; 10]$, on a $B'(x) < 0$ et la fonction B est alors strictement décroissante sur cet intervalle.

On peut alors donner le tableau de variations de la fonction B sur $[1; 10]$:

x	1	4	10
Signe de $B'(x)$	+	0	−
Variations de B	-2 ↗ $\frac{1}{2}$ ↘ $-3 + \sqrt{10}$		

2. (a) Le bénéfice maximal est atteint lors de la production de 4000 pièces et vaut 500€.

(b) On a :

$$\begin{aligned}
 B(x) = 0,35 &\iff \frac{-2x + 10\sqrt{x} - 10}{x} = 0,35 \\
 &\iff \frac{-2x + 10\sqrt{x} - 10}{x} - 0,35 = 0 \\
 &\iff \frac{-2,35x + 10\sqrt{x} - 10}{x} = 0 \\
 &\iff -2,35x + 10\sqrt{x} - 10 \quad \text{et} \quad x \neq 0.
 \end{aligned}$$

On pose $u = \sqrt{x}$, on a alors :

$$-2,35x + 10\sqrt{x} - 10 \iff \begin{cases} -2,35u^2 + 10u - 10 = 0 \\ u = \sqrt{x} \end{cases}$$

Soit Δ le discriminant de $-2,35u^2 + 10u - 10$:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 10^2 - 4 \times (-2,35) \times (-10) \\
 &= 100 - 94 \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$ alors l'équation $-2,35u^2 + 10u - 10 = 0$ admet deux racines :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{-10 - \sqrt{6}}{2 \times (-2,35)} & \text{et} & & u_2 &= \frac{-10 + \sqrt{6}}{2 \times (-2,35)} \\
 &= \frac{10 + \sqrt{6}}{4,7} & & & &= \frac{10 - \sqrt{6}}{4,7}
 \end{aligned}$$

Ainsi l'équation $-2,35x + 10\sqrt{x} - 10$ admet deux solutions :

$$u_1^2 = \left(\frac{10 + \sqrt{6}}{4,7} \right)^2 \approx 7,016 \quad \text{et} \quad u_2^2 = \left(\frac{10 - \sqrt{6}}{4,7} \right)^2 \approx 2,581.$$

Finalement, le bénéfice unitaire est égal à 0,35 € lorsque l'entreprise produit 2 581 pièces ou 7 016 pièces par semaine.

Exercice 2 :

1. Lorsque $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2\pi$.

2. (a) En utilisant Pythagore, on a :

$$R^2 = h^2 + r^2.$$

Finalement, on obtient :

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 R^2 - r^2 > 0 &\iff R^2 > r^2 \\
 &\iff R > r > 0 \quad \text{car } r > 0
 \end{aligned}$$

(b) Le volume d'un cône est donné par :

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

- (c) La fonction f est dérivable sur $[0; R[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0; R[$.
 f est donc de la forme $u \times v$ avec $u(x) = \frac{\pi}{3}x^2$ et $v(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.
 De plus, pour tout $x \in [0; R[$, on a :

$$u'(x) = \frac{2\pi}{3}x \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; R[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{3}x^2 \times \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{2\pi}{3}x \times \sqrt{R^2 - x^2} \\ &= \frac{-\pi x^3 - 2\pi x^3 + 2\pi R^2 x}{3\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= \frac{-\pi x(3x^2 - 2R^2)}{3\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= \frac{-\pi x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}R)(\sqrt{3}x + \sqrt{2}R)}{3\sqrt{R^2 - x^2}} \end{aligned}$$

On peut alors donner le tableau de signes suivant :

x	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}R$	R
Signe de $-\pi x$	0	—	
Signe de $\sqrt{3}x - \sqrt{2}R$		— 0 +	
Signe de $\sqrt{3}x + \sqrt{2}R$		+	
Signe de $f'(x)$	0	+	0 —
Variations de f	$\begin{array}{ccc} & \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} & \\ \nearrow & & \searrow \\ 0 & & 0 \end{array}$		

- (d) Pour $R = 10$, on a le tableau de variations suivant :

x	1	$10\sqrt{\frac{2}{3}}$	10
Variations de f	$\begin{array}{ccc} & \frac{2000\pi}{9\sqrt{3}} & \\ \nearrow & & \searrow \\ \frac{\pi}{3}\sqrt{99} & & 0 \end{array}$		

- (e) graphique

- (f) D'après le tableau de variations, le maximum de la fonction f sur $[0; 10]$ est atteint pour $x = \sqrt{\frac{2}{3}}R$.
Le volume du cône exprimé en fonction de r est donné par la formule suivante :

$$V = f(r).$$

Ainsi, le maximum du volume du cône est atteint lorsque $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$.

De plus, on a :

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R \iff \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

- (g) On a le périmètre de l'arc BSA est $p = R\alpha$. De plus, le périmètre de la base du cône est aussi donné par $p = 2\pi r$.

On a alors :

$$2\pi R\sqrt{\frac{2}{3}} = R\alpha \iff \alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Soit $\alpha \approx 294^\circ$.

3. (a) En reprenant la question 2.(a), on trouve :

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

Par un même raisonnement, il vient que

$$0 \leq h \leq R.$$

- (b) Le volume d'un cône est donné par :

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}(R^2 - h^2)h.$$

- (c) On définit la fonction g sur $[0; R]$ par :

$$g(x) = \frac{\pi}{3}x(R^2 - x^2).$$

On obtient alors que $V = g(h)$ et on recherche le maximum de cette fonction g .

- (d) La fonction g est dérivable sur $[0; R]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur ce même intervalle.

De plus, pour tout $x \in [0; R]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\pi}{3}(R^2 - x^2 - 2x^2) \\ &= \frac{\pi}{3}(R^2 - 3x^2) \\ &= \frac{\pi}{3}(R - \sqrt{3}x)(R + \sqrt{3}x) \end{aligned}$$

Le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $R - \sqrt{3}x$ car , pour tout $x \in [0; R]$, on a $R + \sqrt{3}x > 0$.

x	0	$\frac{R}{\sqrt{3}}$	R
Signe de $R - \sqrt{3}x$	+	0	-
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Variations de g	$ \begin{array}{ccc} & \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} & \\ \nearrow & & \searrow \\ 0 & & 0 \end{array} $		

Ainsi le volume du cône est maximal lorsque $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

On a alors, en utilisant les mêmes arguments du périmètre de la base :

$$\begin{aligned}
 2\pi\sqrt{R^2 - h^2} = R\alpha &\iff 2\pi\sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^3} = R\alpha \\
 &\iff 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}R = R\alpha \\
 &\iff \alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.
 \end{aligned}$$

Soit $\alpha \approx 294^\circ$.