Exercice 51 p. 34 :

1. On a :

$$u_1 = -\frac{1}{2}u_0 + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} = 2,5.$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 3 = -\frac{5}{4} + 3 = \frac{7}{4} = 1,75.$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 3 = -\frac{7}{8} + 3 = \frac{17}{8} = 2,125.$$

On a :

$$u_2 - u_1 = -0,75 \qquad \text{et} \qquad u_3 - u_2 = 0,375.$$

La suite (u_n) ne peut être arithmétique.
On a :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{7} \qquad \text{et} \qquad \frac{u_3}{u_2} = \frac{14}{17}.$$

La suite (u_n) ne peut être géométrique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = u_n - 2 \iff u_n = v_n + 2.$$

On va chercher à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\,u_n + 3\right) - 2 \\ &= -\frac{1}{2}\,u_n + 1 \\ &= -\frac{1}{2}(v_n + 2) + 1 \\ &= -\frac{1}{2}v_n - 1 + 1 \\ &= -\frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

3. On a :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 2 \\ &= 1 - 2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -1$ ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= v_0\, q^n \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

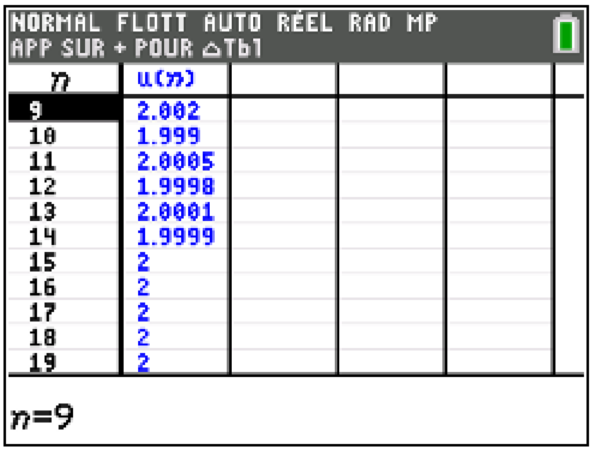
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 2 \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2 \end{aligned}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 - \left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 2\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

5. On utilise le tableau de valeurs de la calculatrice :



n	u(n)
9	2.002
10	1.999
11	2.0005
12	1.9998
13	2.0001
14	1.9999
15	2
16	2
17	2
18	2
19	2

On peut donc conjecturer que la limite de la suite (u_n) est 2.

Exercice 82 p. 37 :

1. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,8u_0+18 \\ &= 0,8\times 65+18 \\ &= 52+18 \\ &= 70. \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} u_2 &= 0,8u_1+18 \\ &= 0,8\times 70+18 \\ &= 56+18 \\ &= 74. \end{aligned}$$

2. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-90 \\ &= 0,8u_n+18-90 \\ &= 0,8u_n-72 \\ &= 0,8(v_n+90)-72 \\ &= 0,8v_n+72-72 \\ &= 0,8v_n. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0-90 \\ &= 65-90 \\ &= -25. \end{aligned}$$

Finalement, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=0,8$ et de premier terme $v_0=-25$.

(b) La suite (v_n) étant une suite géométrique de raison $q=0,8$ et de premier terme $v_0=-25$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= v_0\times q^n \\ &= -25\times 0,8^n. \end{aligned}$$

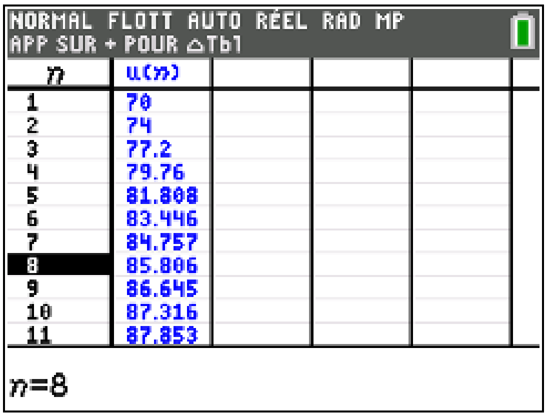
Ainsi, on a :

$$u_n=v_n+90 \iff u_n=90-25\times 0,8^n.$$

3. (a) On a :

1.	$u \longleftarrow 65$
2.	$n \longleftarrow 0$
3.	Tant que $u<85$ faire :
4.	$\quad n \longleftarrow n+1$
5.	$\quad u \longleftarrow 0,8\times u+18$

(b) En utilisant la calculatrice et le tableau de valeurs, on a :



n	u(n)
1	70
2	74
3	77.2
4	79.76
5	81.808
6	83.446
7	84.757
8	85.806
9	86.645
10	87.316
11	87.853

n=8

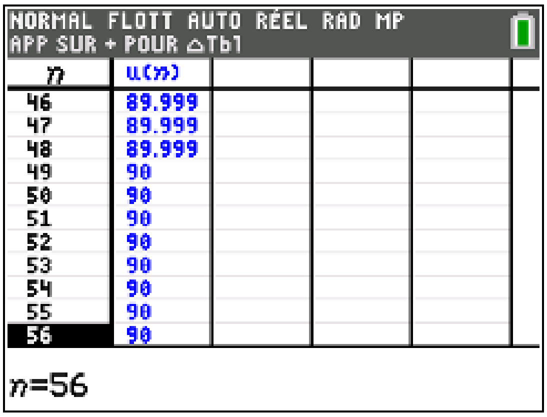
Ainsi, la variable n à la fin de l'exécution de cet algorithme contient la valeur 8.

4. (a) La perte de 20% des abonnements par rapport au moins précédent justifie le facteur 0,8 devant le terme u_n et le gain de 18 particulier supplémentaires justifie le +18. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1}=0,8u_n+18.$$

(b) S la recette mensuelle de la société est de 4 420 €, cela correspond donc à une vente de $\dfrac{4\,420}{52}=85$ abonnements.
On est alors ramené à déterminer l'existence d'un entier n tel que $u_n\geq 85$.
La question précédente nous garantit que pour $n\geq 8$, on a $u_n\geq 85$ c'est-à-dire une recette mensuelle supérieure à 4 420 €.

(c) En utilisant la calculatrice et son tableau de valeur, la suite (u_n) semble tendre vers 90.



n	u(n)
46	89.999
47	89.999
48	89.999
49	90
50	90
51	90
52	90
53	90
54	90
55	90
56	90

n=56

Ainsi, le nombre d'abonnements mensuels semble tendre vers 90 soit une recette correspondante de $90\times 52=4\,680.$ €.