Remarques :

— Pour la question 1 : L'idée soulevée par tous est juste cependant vous ne démontrez rien.

— Pour la question 2 : On parle de fonction f et non de fonction $f(x)$.
Vous supposez pour la plupart que l'ordonnée du point d'abscisse 5 est aligné avec les points H et B : D'où cela vient-il ?

— Pour les questions 2 et 3 : Il faut reprendre la méthode pour construire des graphiques (vos graphiques sont trop souvent approximatifs : On utilise une échelle adaptée, on laisse apparents les points et on fait attention au domaine de définition de la fonction, ...
On précise pour une fonction le domaine de définition (pour les paraboles : $[0;5]$ et $[5;10]$ et pour le 3ème degré : $[0;10]$).

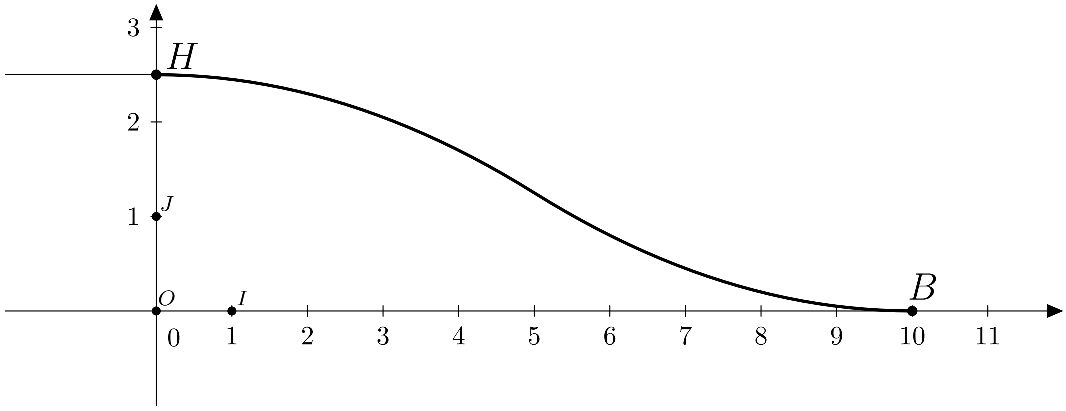
— Pour la question 3.c : Les fonctions f, f' et f'' sont définies sur $[0;10]$ et non sur $\mathbb{R}$. ce n'est pas parce que j'ai un minimum négatif pour f que ça devient un maximum pour $|f|$.

1. On considère une rampe rectiligne $[BH]$.
La fonction f (si elle existe) est donc définie sur $[0;10]$ par :
$$f(x) = ax + b$$
Or $f(0) = 2,5$ donc $b = 2,5$. De plus, on a :
$$a = \frac{-2,5}{10} = -0,25$$
Ainsi, f est définie sur $[0;10]$ par $f(x) = -0,25x + 2,5$. Ainsi, pour tout $x \in [0;10]$, $f'(x) = -2,5$.
Cependant $f'(0) \neq 0$ donc la rampe n'est pas tangente au terrain.
Conclusion : une telle fonction f ne peut exister.

2. (a) On considère une parabole $\mathcal{P}_1$ de sommet $H(0;2,5)$; elle est la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$.
Or $H \in \mathcal{P}_1$ donc $c_1 = 2,5$.
De plus, H est le sommet de la parabole $\mathcal{P}_1$ donc $g'(0) = 0$ c'est-à-dire $2a_1 \times 0 + b_1 = 0$ c'est-à-dire $b_1 = 0$.
On considère la parabole $\mathcal{P}_2$ de sommet $H(10;0)$. Elle est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$.
Or $B \in \mathcal{P}_2$, donc $100a_2 + 10b_2 + c_2 = 0 \quad (E_1)$.
B est le sommet de $\mathcal{P}_2$ donc $f'(10) = 0$ soit $2a_2 \times 10 + b_2 = 0$, c'est-à-dire $b_2 = -20a_2 \quad (E_2)$.
Des équations (E_1) et (E_2), on en déduit que $c_2 = 100a_2$.
On suppose de plus que les deux paraboles passent par le point I d'abscisse 5 donc :
$$25a_1 + 2,5 = 25a_2 - 100a_2 + 100a_2 \iff 25a_1 + 2,5 = 25a_2 \quad (E_3)$$
De plus, en ce point I, les deux paraboles ont la même tangente donc :
$$10a_1 = 10a_2 + b_2 \iff 10a_1 = -10a_2 \quad (E_4)$$
Pour déterminer les coeffcients des deux fonctions f et g, on est ramené à résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} a_1 = -a_2 \\ 25a_1 + 2,5 = 25a_2 \\ c_2 = 100a_2 \\ b_2 = -20a_2 \end{cases}$$
On obtient alors les solutions suivantes :
$$\begin{cases} a_1 = -0,05 \\ a_2 = 0,05 \\ b_2 = -1 \\ c_2 = 5 \end{cases}$$
Conclusion : La pente peut être la réunion de deux morceaux de paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ avec :

— $\mathcal{P}_1$ la parabole d'équation $y = -0,05x^2 + 2,5$ avec $x \in [0;5]$;
— $\mathcal{P}_2$ la parabole d'équation $y = 0,05x^2 - x + 5$ avec $x \in [5;10]$.

(b) On obtient la figure suivante :



3. (a) On considère une fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Pour tout $x \in [0;10]$, on a $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
On a les constraintes suivantes :
— $H \in \mathcal{C}_f$ donc $f(0) = 2,5$ c'est-à-dire $d = 2,5$.
— la pente en H est nulle donc $f'(0) = 0$ c'est-à-dire $c = 0$.
— $B \in \mathcal{C}_f$ donc $f(10) = 0$ c'est-à-dire $1000a + 100b + 2,5 = 0 \qquad (E_5)$.
— la pente en B est nulle donc $f'(10) = 0$ c'est-à-dire $15a + b = 0 \qquad (E_6)$.
On est alors ramené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 15a + b = 0 \\ 1000a + 100b + 2,5 = 0 \end{cases}$$

A près résolution , on trouve :

$$\begin{cases} a = 0,005 \\ b = -0,075 \end{cases}$$

Conclusion : pour tout $x \in [0;10]$, on a $f(x) = 0,005x^3 - 0,075x^2 + 2,5$.

(b) Pour tout $x \in [0;10]$, $f'(x) = 0,015x^2 - 0,15x$.
On étudie le signe de la fonction f' : il s'agit d'une fonction du second degré.
On a :

$$\Delta = (-0,15)^2 = 0,0225$$

Comme $\Delta > 0$, la fonction f' possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-0,15 - \sqrt{0,0225}}{2 \times 0,015} = 10 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-0,15 + \sqrt{0,0225}}{2 \times 0,015} = 0$$

Le tableau de signes de la fonction f' est le suivant :

x	$-\infty$		0		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme sur l'intervalle $[0;10]$ la fonction f' est négative, alors $|f'(x)| = -f'(x)$.
On cherche alors pour quelle valeur de $x \in [0;10]$ la fonction $-f'(x)$ est maximale.
Pour tout $x \in [0;10]$, on a $-f'(x) = -0,015x^2 + 0,15x$.
Le maximum est atteint en $\alpha = \dfrac{0+10}{2} = 5$ et vaut $-f'(5) = 0,375$.