Exercice 1 : *(4 points)*

1. $\binom{12}{6}$ est égale à :

   (a) $\frac{1}{2}$; (b) 6 ; (c) $\boxed{924}$; (d) 72. */1 point*

2. St X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,25$, la probabilité $P(X = 2)$ est égale à :

   (a) $\frac{2}{7}$; (b) $\frac{1}{64}$; (c) $\frac{1}{8\,192}$; (d) $\boxed{\frac{5\,103}{16\,384}}$ */1 point*

3. On considère trois événements A, B et C tels que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,65$, $P(A \cup C) = 0,7$ et $P(B \cup C) = 0,8$. On a alors :

   (a) $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants ;}}$ (b) A et C sont indépendants ; (c) B et C sont indépendants ;

   /1 point

4. Un élève répond au hasard aux 5 questions d'un QCM. Chaque proposition du test propose trois réponses dont une seule est juste. On appelle A l'événement : « L'élève a 5 réponses justes ».

   (a) $P(A) = \frac{1}{5}$; (b) $P(A) = \frac{5}{3}$; (c) $P(A) = \frac{1}{15}$; (d) $\boxed{P(A) = \frac{1}{243}.}$

   /1 point

Exercice 2 : *(8 points)*

On traduit les phrases suivantes :

— en l'absence de tout incident, l'alarme se déclenche avec une probabilité $P_{\overline{I}}(A) = \frac{1}{50}$

— la probabilité qu'un incident survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $P(I \cap \overline{A}) = \frac{1}{500}$;

— la probabilité qu'un incident se produise est égale à $P(I) = \frac{1}{100}$.

1. La probabilité que l'alarme se déclenche sachant qu'un incident s'est produit est $P_I(A)$.
   On a :

$$\begin{aligned} P_I(A) &= 1 - P_I(\overline{A}) \\ &= 1 - \frac{P(I \cap \overline{A})}{P(I)} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{500}}{\frac{1}{100}} \\ &= 1 - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

/1,5 point

2. La probabilité qu'un incident survienne et que l'alarme se déclenche est $P(I \cap A)$.
   On a :

$$\begin{aligned} P(I \cap A) &= P(I) - P(I \cap \overline{A}) \\ &= \frac{1}{100} - \frac{1}{500} \\ &= \frac{4}{500} \\ &= \frac{1}{125}. \end{aligned}$$

/1,5 point

3. La probabilité que l'alarme se déclenche est $P(A)$.
   Les événements I et $\overline{I}$ forment un système complet d'événements.
   D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(I \cap A) + P(\overline{I} \cap A) \\ &= P(I \cap A) + P_{\overline{I}}(A) \times P(\overline{I}) \\ &= \frac{1}{125} + \frac{1}{50} \times \frac{99}{100} \\ &= \frac{40}{5\,000} + \frac{99}{5\,000} \\ &= \frac{139}{5\,000} \end{aligned}$$

/1,5 point

4. On note D l'événement : « le système est mis en défaut ».
   On a $D = (A \cap \overline{I}) \cup (\overline{A} \cap I)$. Les événements $\overline{A} \cap I$ et $A \cap \overline{I}$ sont disjoints. On a alors :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap \overline{I}) + P(\overline{A} \cap I) \\ &= P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(A) + P(\overline{A} \cap I) \\ &= \frac{99}{100} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{500} \\ &= \frac{99}{5\,000} + \frac{10}{5\,000} \\ &= \frac{109}{5\,000} \end{aligned}$$

/2 points

5. La probabilité qu'il y ait réellement un incident sachant que l'alarme s'est déclenché est $P_A(I)$.
   On a :

$$\begin{aligned} P_A(I) &= \frac{P(A \cap I)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{125}}{\frac{139}{5\,000}} \\ &= \frac{\frac{40}{5\,000}}{\frac{139}{5\,000}} \\ &= \frac{40}{139}. \end{aligned}$$

/1,5 point

Exercice 3 : *(3 points)*

Calculer les limites des suites suivantes :

1. $1,1^n$ est de la forme q^n avec $q = 1,1 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,1^n = +\infty$.
   Par produit,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

/0,75 point

2. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n = +\infty$ donc, par somme, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

/0,75 point

3. On ne peut pas conclure directement par les théorèmes d'opérations sur les limites, car on obtient une forme indéterminée de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} w_n &= \frac{n^2+1}{3n^2-n} \\ &= \frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\dfrac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n}} \end{aligned}$$
/0,75 point
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc par somme, puis quotient, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{3}$$
/0,75 point

Exercice 4 : *(9 points)*

Partie A : avec une suite auxiliaire

1. On a :
$$\begin{aligned} z_{n+1} &= u_{n+1} - 16 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 8 - 16 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 8 \\ &= \frac{1}{2}(z_n + 16) - 8 \\ &= \frac{1}{2}z_n \end{aligned}$$
/1 point
De plus, on a :
$$\begin{aligned} z_0 &= u_0 - 16 \\ &= 10 - 16 \\ &= -6. \end{aligned}$$
/0,5 point
Finalement, la suite (z_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $z_0 = -6$.

2. Comme (z_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $z_0 = -6$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$z_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = z_n + 16$, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 16.$$
/1 point

3. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc par produit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} -6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$
Enfin, par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 16$. ***/0,5 point***

Partie B : avec une récurrence

1. On considère la propriété définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20.$$
— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 10$ et $u_1 = 13$, ainsi, on a :
$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 20.$$
La propriété est donc vraie au rang $n = 0$. ***/0,5 point***
— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
On démontre que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$.
On a :
$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20 &\iff 0 \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}u_{n+1} \leq 10 \\ &\iff 8 \leq \frac{1}{2}u_n + 8 \leq \frac{1}{2}u_{n+1} + 8 \leq 18 \\ &\iff 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20. \end{aligned}$$
La propriété est donc héréditaire. ***/1 point***
— Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20.$$
/0,5 point

2. D'après la question, précédente, on a :
— (u_n) croissante ;
— (u_n) majorée par 20 ;
Ainsi, la suite (u_n) converge vers une limite ℓ. ***/0,5 point***
De plus, ℓ vérifie :
$$\begin{aligned} \ell = \frac{1}{2}\ell + 8 &\iff \frac{1}{2}\ell = 8 \\ &\iff \ell = 16. \end{aligned}$$
Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 16$ ***/0,5 point***

Partie C : étude d'un algorithme

1.

```
n ⟵ 0
u ⟵ 1
Tant que |u−16| ≥ 10^-6 faire :
    n ⟵ n+1
    u ⟵ (1/2)u+8
Fin Tant que
Afficher n+1
```

/2 points

2. — En rentrant la formule de récurrence de la suite (u_n) et son terme initial, j'affiche le tableau de valeurs des termes u_n.
   — Je cherche alors la valeur de n pour laquelle $u_n > 15,999\,999$.
   — je trouve alors : $u_{22} \approx 15,999\,998\,6 < 15,999\,999$ et $u_{23} \approx 15,999\,999\,3 > 15,999\,999$
   — Ainsi, la valeur n cherchée est $n = 23$. ***/1 point***