Exercice 1 : *(4 points)*

1. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sin^2(2x) = 0,01$: *|1 point*

   (a) n'admet aucune solution (c) admet deux solutions

   (b) admet une solution (d) $\boxed{\text{admet une infinité de solutions}}$

2. La fonction cosinus est une fonction : *|1 point*

   (a) impaire ; (b) $\boxed{\text{paire ;}}$ (c) positive ; (d) ni paire ni impaire.

3. La fonction sinus est périodique de période : *|1 point*

   (a) π ; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\boxed{2\pi\,;}$ (d) $\frac{\pi}{3}$.

4. La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x)$ a pour expression : *|1 point*

   (a) $f'(x) = \cos(3x)$; (b) $f'(x) = -3\cos(3x)$; (c) $\boxed{f'(x) = 3\cos(3x).}$

Exercice 2 : *(5 points)*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -x^3 + \frac{5x^2}{4} + 8 = -x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 8.$
   La fonction f étant polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{f'(x) = -3x^2 + \frac{5}{2}x}$$

|1 point

2. La fonction g est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x - 4$ et $v(x) = x^2 + 5$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) \neq 0$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1 \times (x^2+5) - 2x(x-4)}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{x^2 + 5 - 2x^2 + 8x}{(x^2+5)^2} \\ &\boxed{= \frac{-x^2 + 8x + 5}{(x^2+5)^2}}. \end{aligned}$$

|1,5 point

3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(2-x)^5}$ est de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u(x) = (2-x)^5$, , elle est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ car pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a $u(x) \neq 0$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a $u'(x) = -5(2-x)^4$.

3. *(suite)* Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 5 \times \frac{-u'(x)}{u(x)^2} \\ &= 5 \times \frac{5(2-x)^4}{(2-x)^{10}} \\ &\boxed{= \frac{25}{(2-x)^6}}. \end{aligned}$$

. ***/1,5 point***

4. La fonction k est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4x$ et $v(x) = \sqrt{-2x+5}$, elle est donc dérivable sur $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$, on a : $u'(x) = 4$.

Déterminons $v'(x)$: v est de la forme $\sqrt{w}$ avec $w(x) = -2x+5$.

On a donc, pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$, $w'(x) = -2$ et on a :

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} \\ &= \frac{-2}{2\sqrt{-2x+5}} \\ &\boxed{= \frac{-1}{\sqrt{-2x+5}}}. \end{aligned}$$

. ***/1 point***

De plus, pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} k'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= 4 \times \sqrt{-2x+5} + \frac{-1}{\sqrt{-2x+5}} \times 4x \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{-2x+5}^2}{\sqrt{-2x+5}} + \frac{-1}{\sqrt{-2x+5}} \times 4x \\ &= \frac{4(-2x+5) - 4x}{\sqrt{-2x+5}} \\ &= \frac{-4(2x-5+x)}{\sqrt{-2x+5}} \\ &\boxed{= \frac{-4(3x-5)}{\sqrt{-2x+5}}}. \end{aligned}$$

/1 point

Exercice 3 : *(4 points)*

1. Pour tout x tel que $v(x) \neq 0$, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et on a :

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.}$$

/1 point

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{g'(x) = n \cdot x^{n-1}.}$$

/1 point

2. La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 1$ et $v(x) = x^n$.
Elle est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et dont v ne s'annule pas sur cet intervalle.
De plus, pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$u'(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = nx^{n-1}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{0 \times x^n - nx^{n-1} \times 1}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -\frac{n}{x^{n+1}} \end{aligned}.$$

Finalement, pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$\boxed{f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}.}$$

/2 points

Exercice 4 : *(12,5 points)*

1. La fonction f étant polynômiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 2.$$

La fonction f' étant un polynôme du second degré, on note Δ son discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-2) \\ &= 16 + 24 \\ &= 40. \end{aligned}$$

1. *(suite)*. Comme $\Delta > 0$, f' admet deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4-\sqrt{40}}{2\times 3} \\ &= \frac{4-2\sqrt{10}}{6} \\ &= \frac{2-\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{4+\sqrt{40}}{2\times 3} \\ &= \frac{4+2\sqrt{10}}{6} \\ &= \frac{2+\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le tableau de signes de la fonction f' suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on en déduit les variations de f :

— Comme $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]-\infty ; \frac{2-\sqrt{10}}{3}\right[$, f est strictement croissante sur $\left]-\infty ; \frac{2-\sqrt{10}}{3}\right[$.

— Comme $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \left]\frac{2-\sqrt{10}}{3} ; \frac{2+\sqrt{10}}{3}\right[$, f est décroissante sur $\left]\frac{2-\sqrt{10}}{3} ; \frac{2+\sqrt{10}}{3}\right[$.

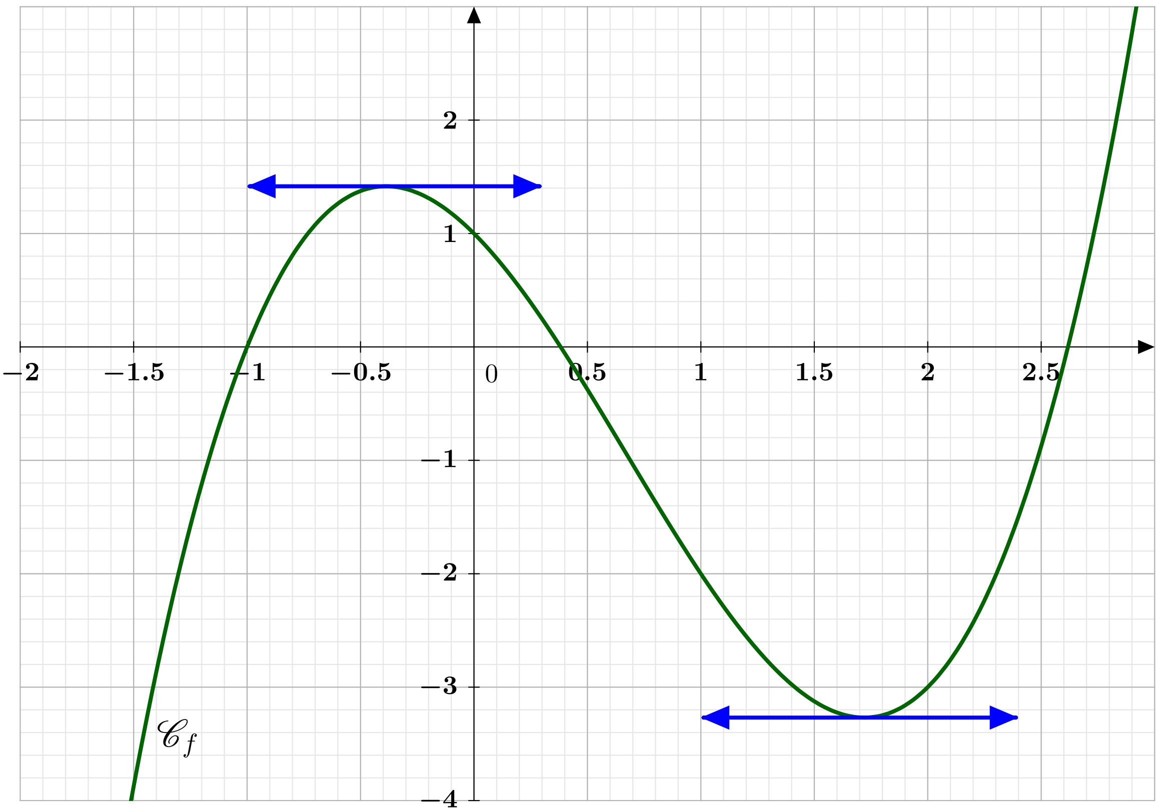
— Comme $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]\frac{2+\sqrt{10}}{3} ; +\infty\right[$, f est strictement croissante sur $\left]\frac{2-\sqrt{10}}{3} ; +\infty\right[$.

/2 points

2. (a) On a $f(0) = 1$ donc $(0;1)$ est l'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. ***/0,5 point***

(b) D'après le tableau de signes de f' donné en question précédente, il y deux valeurs pour lesquelles $f'(x) = 0$ qui sont $\frac{2-\sqrt{10}}{3}$ et $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$.
Ainsi, il y a deux tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}_f$. ***/0,5 point***

2. (c) ***/1,5 point***



(d) D'après le graphique, l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$ dont -1 qui est une solution entière. ***/0,5 point***

3. (a) On découpe l'intervalle $[0; +\infty[$ en trois sous intervalles : $\left[0; \dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\right]$; $\left[\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}; 3\right]$ et $[3; +\infty[$.

— Sur $\left[0; \dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\right]$: la fonction f est continue car polynômiale ; la fonction f y est strictement décroissante et $f(0) = 1 >$ et $f\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\right) < 0$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $\left[0; \dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\right]$.

— Sur $\left[\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}; 3\right]$: la fonction f est continue car polynômiale ; la fonction f y est strictement croissante et $f\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\right) < 0$ et $f(3) = 4 > 0$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée β, sur $\left[\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}; 3\right]$.

— Sur $[3; +\infty[$: la fonction f y est strictement croissante donc son minimum est atteint pour $x = 3$ et vaut $f(3) = 4$. Ainsi, pour tout $x \in [3; +\infty[$, on a $f(x) \geq 4$ et l'équation $f(x) = 0$ n'admet donc aucune solution sur cet intervalle.

En concaténant les trois intervalles, l'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$. ***/2 points***

3. (b) On a : $0,381 \leq \alpha \leq 0,382$ et $2,618 \leq \beta \leq 2,619.$ ***/1 point***

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(x+1)(x^2-3x+1) &= x^3-3x^2+x+x^2-3x+1\\ &= x^3-2x^2-2x+1\\ &= f(x).\end{aligned}$$

/1 point

(b) On a :

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\iff (x+1)(x^2-3x+1)=0\\ &\iff x+1=0 \text{ ou } x^2-3x+1=0\\ &\iff x=-1 \text{ ou } x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

En effet, soit Δ le discriminant de x^2-3x+1, on a :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2-4\times1\times1\\ &= 9-4\\ &= 5.\end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme x^2-3x+1 admet donc deux racines :

$$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, on obtient bien $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. ***/1 point***

(c) Comme $\alpha < \beta$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, on obtient bien $\alpha=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. ***/0,5 point***

(d) Le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		α		β		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

/1 point

5. On a :

— $k < f\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\right)$: 1 seule solution.

— $k = f\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\right)$: 2 solutions

— $f\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\right) < k < f\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{3}\right)$: 3.

— $k = f\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{3}\right)$: 2 solutions.

— $k > f\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{3}\right)$: 1 seule solution.

/1 point