Chapitre 1
Second degré

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Donner la forme canonique d'un trinôme	6 p. 64 et 41 p. 68		
Donner la forme factorisée d'un trinôme	15 à 18 p. 65 et 19 p. 66		
Connaitre les variations d'un trinôme	7 et 8 p. 64		
Resoudre une équation du second degré	20 à 24 p. 66		
Donner le signe d'un trinôme	33 à 36 p. 67		

Travaux dirigés :

- TD 1 : résolution de problèmes historiques.
- TD 2 : résolution d'équations par changement d'inconnues.

Démonstrations exemplaires :

- Résolution de l'équation du second degré

Introduction

Diophante (entre 150 et 350 ap. J.C) est un mathématicien d'origine syrienne qui a vécu 84 ans. Il passe une grande partie de sa vie à Alexandrie et possède une parfaite connaissance de la culture grecque. Il écrit trois ouvrages. Son second ouvrage est composé de 13 tomes (uniquement six nous sont parvenus) et traite notamment d'arithmétique ainsi que des équations du second degré en introduisant l'utilisation de symboles (novateur pour l'époque).

Al-Khwarizmi (788 à 850) est un mathématicien et astronome arabe. Il écrit deux ouvrages majeurs dont le premier traite de la résolution des équations du 1er et 2nd degré en se ramenant à des cas de référence. Les méthodes qu'il décrit sont purement algébriques mais illustrées par des procédés géométriques. Le mot « algorithme » est une traduction de son second ouvrage *Algorithmi*.

I. Le trinôme $ax^2 + bx + c$

1. La forme développée

Définition 1.1 : ***d'un trinôme***

Dire qu'une fonction f est *une fonction polynôme de degré 2* (ou *fonction trinôme*) signifie qu'il existe des nombres réels a $(a \neq 0)$, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Il s'agit de *la forme développée* de la fonction f.
Les nombres a, b et c sont *les coefficients* du trinôme.

Exemple 1.2 :

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2 - 4x + 3$ est une fonction trinôme.
En effet, elle est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = 3$.

Remarque 1.3 :

Il n'est pas interdit d'avoir $b = 0$ et/ou $c = 0$.
Ainsi, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x^2$ est une fonction trinôme avec $a = -4$, $b = 0$ et $c = 0$.

Exemple 1.4 :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = (x-1)^2 - x^2$ n'est pas une fonction du second degré.

2. La forme canonique

Théorème 1.5 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Alors f admet une écriture, dite *forme canonique*, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Démonstration :

On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \quad \text{car } a \neq 0 \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a\,(x-\alpha)^2 + \beta.
\end{aligned}$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.
On retrouve aussi :

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= a(\alpha - \alpha)^2 + \beta \\
&= \beta.
\end{aligned}$$

□

Application 1.6 : ***Déterminer une forme canonique***

Pour déterminer la forme canonique d'un trinôme, à partir de sa forme développée, on peut utiliser la formule ci-dessus, ou procéder de la manière suivante :

1. on factorise la forme développée par le coefficient a ;
2. on reconnait le début d'un carré, à l'aide de l'une des deux identités remarquables suivantes :
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{ou} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
3. on distribue uniquement le facteur a (factorisée en 1.).

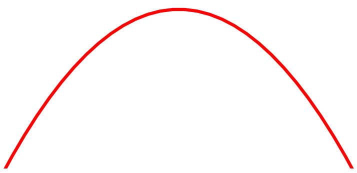
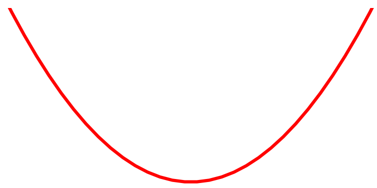
Exemple 1.8 :

Déterminons la forme canonique de la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 16x + 37$.

3. Courbe représentative

Propriété 1.9 :

La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole $\mathcal{P}$.

$a < 0$	$a > 0$
La parabole est orientée vers le bas.	La parabole est orientée vers le haut.
	

Propriété 1.10 :

Le sommet de la parabole, noté S, a pour coordonées $(\alpha; \beta)$.
Cette parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$ (droite verticale).

Application 1.10 : – Déterminer les coordonnées du sommet d'une parabole

Pour déterminer les coordonnées du sommet d'une parabole associée à une fonction f de la forme ax^2+bx+c, on pourra, appliquer les formules correspondantes à α et β (vues dans la forme canonique), ou procéder de la manière suivante :

1. On résout l'équation $f(x) = c$.
   On trouvera alors deux solutions (identiques ou différentes) x_1 et x_2 (dont l'une est 0).
2. On calcule $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Exemple 1.12 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$.
Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.

Remarque 1.13 :

De même, en utilisant les formules donnant α et β, on va retrouver les mêmes résultats.
On a :

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{8}{2 \times 2} \\ &= -\frac{8}{4} \\ &= -2.\end{aligned}$$

Le calcul de β est le même que précédemment.

4. Variations

Propriété 1.14 :

On considère un trinôme f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$:

Si $a < 0$, β est le maximum de la fonction atteint pour $x = \alpha$.
Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Var f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Si $a > 0$, β est le minimum de la fonction atteint pour $x = \alpha$.
Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Var f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Exemple 1.15 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$.
Déterminons le tableau de variation de cette fonction.
On a vu, dans le Focus précédent, que $\alpha = -2$ et $\beta = -11$.
Ainsi, comme $a > 0$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Var f		$\searrow$	-11	$\nearrow$	

II. Factorisation d'un trinôme

Définition 1.16 : — ***Discriminant d'un trinôme***

Le discriminant, noté Δ, d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Remarque 1.17 :

La forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2 est alors donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Exemple 1.18 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + x$.
Déterminer son discriminant Δ.

1. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Définition 1.19 : ***d'une équation du second degré***

Résoudre une *équation du second degré* c'est trouver tous les réels x qui vérifient une équation du type :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Remarque 1.20 :

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées *les racines* du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Théorème 1.21 :

On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) et soit Δ son discriminant :

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solutions réelles.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution réelle double :

$$x_1 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles disctintes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Application 1.21 : ***Les équations du second degré***

Pour résoudre une équation du second degré, on procèdera de la manière suivante :

1. On se ramène à une équation de la forme $P(x) = 0$, où P est un trinôme.
2. Si on ne peut pas résoudre l'équation directement avec les moyens de 2^{de}, on calcule Δ et, selon son signe, on calcule les racines éventuelles.
   Le calcul de Δ ne doit pas être systématique.

Exemple 1.23 :

Résoudre l'équation suivante :

$$3x^2 - x + 2 = -2x^2 - 5x + 1.$$

Démonstration exemplaire :

On considère l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ (avec $a\neq 0$) et soit Δ son discriminant.
On rappelle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0\\ &\iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a}\\ &\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}. \end{aligned}$$

Le signe de $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ dépend uniquement du signe de Δ car $4a^2$ est un nombre strictement positif.
Ainsi, on distingue 3 cas :

- $\Delta<0$: On a $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$ c'est-à-dire $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2<0$.
  Or un carré ne pouvant être négatif, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution réelle.$\Delta=0$:
  On a :

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 &\iff x+\frac{b}{2a}=0\\ &\iff x=-\frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

- Pour $\Delta=0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une seule solution :

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

- $\Delta>0$: On a :

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} &\iff x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad\text{ou}\quad x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\\ &\iff x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\text{ou}\quad x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &\iff x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\text{ou}\quad x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &\iff x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\text{ou}\quad x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

  Pour $\Delta>0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\text{et}\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Factorisation d'un trinôme

Théorème 1.25 :

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) et soit Δ son discriminant :
- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme n'est pas factorisable.
- Si $\Delta = 0$ alors le trinôme est factorisable sous la forme

$$a(x - x_1)^2 \quad \text{avec} \quad x_1 = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta \geq 0$ alors le trinôme est factorisable sous la forme

$$a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{avec} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exemple 1.26 :

Factorisons (si possible) les polynômes suivants :

1. $f(x) = 3x^2 - 2x - 7$
2. $g(x) = -3x^2 + 12x - 12$

3. Relation entre coeffcients et racines

Propriété 1.27 :

Deux réels ont pour somme s et pour produit p si et seulement si ils sont solutions de l'équation $x^2 + sx + p = 0$.

Démonstration :

Soient deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 + x_2 = s$ et $x_1 x_2 = p$.
On a :

$$x_1 + x_2 = s \iff x_2 = s - x_1.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} x_1 x_2 = p &\iff x_1(s - x_1) = p \\ &\iff x_1 s - x_1^2 = p \\ &\iff x_1^2 - s x_1 + p = 0. \end{aligned}$$

x_1 est donc solution de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.
En inversant les rôles de x_1 et x_2, il vient que x_2 est aussi solution de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.
Réciproquement, soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.

En appliquant le théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{-s}{1} \\ &= s. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{p}{1} \\ &= p. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.29 :

Existe-t-il deux nombres réels dont la somme vaut 5 et le produit 2 ?

Propriété 1.30 :

On considère deux solutions, x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_1,\ x_2 \text{ solutions de } ax^2 + bx + c = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Application 1.30 : ***Recherche rapide d'une racine***

La dernière propriété nous donne un lien entre les coefficients d'une fonction polynôme du second degré et ses racines.
Ainsi, lorsqu'on connait une racine (ou qu'elle est évidente) d'un polynôme du second degré, on peut utiliser le lien entre les racines et les coefficients de la fonction.

Exemple 1.32 :

On considère l'équation $4x^2 - 10x + 6 = 0$.
Résoudre cette équation après avoir vérifié que 1 est racine évidente.

4. Signe d'un trinôme

Théorème 1.33 :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et soit Δ son discriminant :

- Si $\Delta < 0$ alors on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

- Si $\Delta = 0$ alors on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta > 0$ alors on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple 1.34 :

Etudions, suivant les valeurs de x, le signe de chacun des trinômes :

1. $f(x) = -x^2 + 3x - 5$
2. $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$.