Chapitre 3
Probabilités Conditionnelles et Indépendance

Sommaire

I. Les probabilités condionnelles **2**
- 1. Définition 2
- 2. Propriétés 2

II. Les probabilités totales **5**

III. Indépendance. **7**
- 1. Indépendance de deux événements 7
- 2. Indépendance de deux variables aléatoires 9

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Construire et exploiter un arbre pondéré en lien avec une situation	11 et 12, 14 à 17 et 19 p. 293, 20 et 21 p. 294, 65 p. 301		
Utiliser les formules concernant les probabilités conditionnelles	1 à 4 et 8 à 10 p. 292		
Etudier ou exploiter l'indépendance de deux événements	24 à 26, 28 à 30 p. 294, 37 p. 296		

- TD 2 : Etude de l'efficacité d'un vaccin.

Introduction

Thomas Bayes (1702 à 1761), mathématicien anglais, s'interessa particulièrement aux calculs des probabilités sous l'influence de Moivre : il a notamment permis de calculer la probabilité d'un événement connaisant « ses causes » (D'Alembert utilisait le terme de « probabilité composée » dans « L'Encyclopédie »).

En médecine, un test diagnostic permet de déterminer si une personne est atteinte par une maladie ou non. Des indicateurs tels que la sensibilité ou la spécificité permettent de chiffrer la capacité de ce test à ne détecter que les porteurs de la maladie. Ces notions sont définies par des probabilités conditionnelles.

I. Les probabilités conditionnelles

1. Définition

Définition 3.1 : de la probabilité de B sachant A

On considère un événement A de probabilité non nulle.
Pour tout événement B, on appelle *probabilité conditionnelle de B si A est réalisé* ou *probabilité de l'événement B sachant A* le nombre réel $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.
On a alors :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

$P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».

Exemple 3.2 :

On donne les probabilités suivantes :

- $P(A)=0,25$
- $P(B)=0,2$
- $P(A\cap B)=0,1$

Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Remarque 3.3 :

$P_B(\cdot)$ est une probabilité sur l'ensemble B.

2. Propriétés

Propriété 3.4 :

Soit B un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement A, on a :

$$0\leq P_B(A)\leq 1.$$

Démonstration :

Par définition, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Or $A \cap B \subset B$ donc on a :

$$P(A \cap B) \leq P(B).$$

De plus, $P(B) \neq 0$. Ainsi, on obtient :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1.$$

De plus, $P(A \cap B) \geq 0$, ainsi :

$$0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1.$$

C'est-à-dire :

$$0 \leq P_B(A) \leq 1.$$

□

Propriété 3.6 :

On considère deux événements A et B de probabilité non nulle.
On retrouve alors les deux formules suivantes :

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) \qquad \text{et} \qquad P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$$

Démonstration :

Elle découle directement de la définition de $P_A(B)$ et $P_B(A)$. □

Exemple 3.8 :

Calculer $P(A \cap B)$ connaissant les probabilités suivantes :

$$P(A) = 0,4 \qquad P(B) = 0,5 \quad \text{et} \quad P_A(B) = 0,2.$$

Propriété 3.9 :

On considère deux événements A et B tels que $P(B) \neq 0$. On a alors les propriétés suivantes :

1. $P_B(B) = 1$;
2. $P_B(\emptyset) = 0$;
3. $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$.

Démonstration :

Soient A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.

1. On a :

$$\begin{aligned} P_B(B) &= \frac{P(B \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

   Finalement,

$$P_B(B) = 1.$$

2. On a :

$$\begin{aligned} P_B(\emptyset) &= \frac{P(\emptyset \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(\emptyset)}{P(B)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Finalement,

$$P_B(\emptyset) = 0.$$

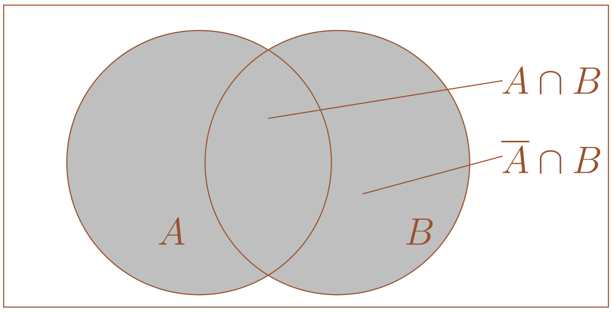
3. On a :

$$\begin{aligned} P_B(A) + P_B(\overline{A}) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}. \end{aligned}$$

   Or $A \cup \overline{A} = \Omega$ donc on a :

$$\left(A \cup \overline{A}\right) \cap B = B \iff \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B) = B.$$

   Ceci peut être visualisé par le diagramme suivant :



   De plus, $\overline{A} \cap B$ et $A \cap B$ sont deux événements incompatibles (l'intersection est l'ensemble vide).
   Donc , on a $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)\right) = P(B)$.
   Finalement,

$$P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1.$$

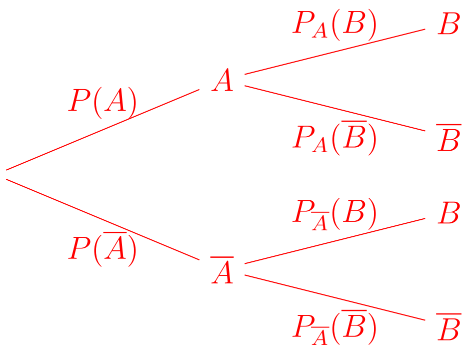
□

II. Les probabilités totales

Dans la plupart des cas, les problèmes concernant les probabilités conditionnelles peuvent s'appuyer sur l'utilisation d'arbres pondérés.

Propriété 3.11 :

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
2. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches composant le chemin.



Exemple 3.12 :

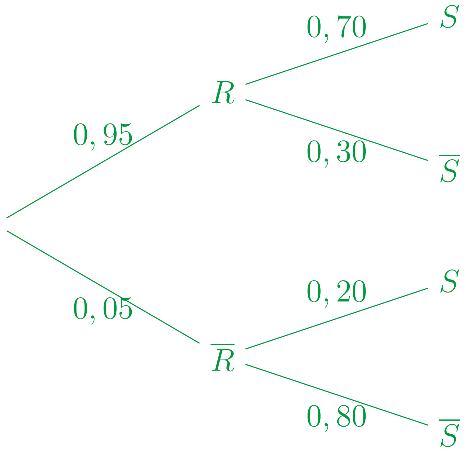
Une enquête a été réalisée auprès des élèves inscrits à la demi-pension d'un lycée. Les résultats révèlent que :

- 95% des élèves déclarent manger régulièrement à la demi-pension et parmi ceux-ci 70% sont satisfaits de la qualité des repas ;
- 20% des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas.

On choisit un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.
On note :

- R l'événement « l'élève mange régulièrement à la cantine » ;
- S l'événement « l'élève est satisfait de la qualité du repas ».

Décrire cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

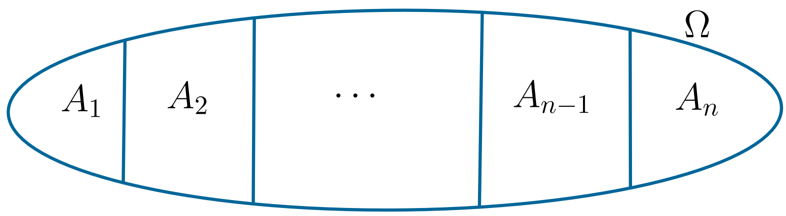


Définition 3.13 : d'un système complet d'événements

On considère A_1, A_2, ..., A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) des événements vérifiant les conditions suivantes :

- ils sont non impossibles :
$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \quad P(A_i) \neq 0;$$
- ils sont deux à deux incompatibles :
$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq n \text{ et pour tout } 1 \leq j \leq n,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset;$$
- leur réunion est égale à l'univers :
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$$

On a alors le schéma suivant :



On dit alors que A_1, A_2, ..., A_n forment *une partition de l'univers* ou *système complet d'événements.*

Exemple 3.14 :

On considère un événement A tel que $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.
Démontrer que les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements.

Propriété 3.15 :

Lorsque les événements A_1, ..., A_n forment un système complet d'événements, on a alors :
$$P(B) = P\left(A_1 \cap B\right) + \ldots + P\left(A_n \cap B\right)$$
C'est-à-dire :
$$P(B) = P\left(A_1\right) P_{A_1}(B) + \ldots + P\left(A_n\right) P_{A_n}(B)$$
Cette formule s'appelle *la formule des probabilités totales.*

Propriété 3.16 :

On considère deux événements A et B. On a alors :
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
Lorsque $P(A) \neq 0$, on a alors :
$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

Remarque 3.17 :

La dernière propriété est une conséquence de la formule des probabilités totales appliquée aux événements A et $\overline{A}$ (formant un système complet d'événements).

Application 3.17 : Calcul d'une probabilité totale

En pratique, lorsqu'on veut calculer la probabilité d'un événement E dont on connait les probablités à travers un système complet d'événements, on procède la manière suivante :

1. on illustra la situation à l'aide d'un arbre pondéré
2. on applique la formule des probabilités totales après avoir énoncé le système complet d'événements

Exemple 3.19 :

En reprenant l'exemple précédent, calculer la probabilité d'élèves satisfaits par la qualité des repas.

III. Indépendance.

1. Indépendance de deux événements

Définition 3.20 : de l'indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemple 3.21 :

Dans une classe de 30 élèves, 10 font de la photographie, 6 du théâtre et 2 font les deux activités. On choisit un élève au hasard dans cette classe.
Les événements A : « l'élève fait de la photographie » et l'événement B : « l'élève fait du théâtre » sont-ils indépendants ?

Propriété 3.22 :

On considère deux événements A et B de probabilités non nulles.
On a équivalence entre les points suivants :

1. A et B sont indépendants
2. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
3. $P_A(B) = P(B)$
4. $P_B(A) = P(A)$

Démonstration :

Soient deux événements A et B de probabilités non nulles. On a :

- 1. $\iff$ 2. : par définition de l'indépendance de A et B.

- 2. $\implies$ 3. : On a :

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A)P(B)}{P(A)} \\ &= P(B). \end{aligned}$$

- 3. $\implies$ 4. : On a :

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B)P(A)}{P(B)} \\ &= P(A). \end{aligned}$$

- 4. $\implies$ 2. : On a :

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P_B(A)P(B) \\ &= P(A)P(B). \end{aligned}$$

Finalement, on a l'équivalence entre les 4 assertions. □

Remarque 3.24 :

La dernière propriété insiste sur la signification de l'indépendance : deux événements sont indépendants si leur probabilité ne sont pas conditionnés par l'autre événement.

Propriété 3.25 :

On considère deux événements A et B.

$$A \text{ et } B \text{ sont independants} \iff A \text{ et } \overline{B} \text{ sont independants.}$$

Démonstration :

Les événements B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers : en effet, B et $\overline{B}$ sont disjoints et $B\cup\overline{B}=\Omega$ lorsque $B\neq\Omega$ et $B\neq\emptyset$.
Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B}).$$

Donc, on a :

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B).$$

De plus, A et B sont indépendants. Donc, on a :

$$P(A\cap B) = P(A)P(B).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(A\cap\overline{B}) &= P(A) - P(A\cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1-P(B)) \\ &= P(A)P(\overline{B}). \end{aligned}$$

Les événements A et $\overline{B}$ sont alors indépendants.
Réciproquement, si A et $\overline{B}$ sont indépendants alors (d'après ce qu'on vient de démontrer) A et $\overline{\overline{B}}=B$ sont indépendants. □

2. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 3.27 : — de l'indépendance de deux variables aléatoires

On considère X et Y deux variables aléatoires. On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout x pris par X et pour tout y pris par Y, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.