NOM : .... Prénom : ....

Exercice 1 : *(4 points)*

Dans chacune des questions suivantes, donner sans justification la seule réponse exacte parmi celles qui sont proposées.

1. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sin^2(2x) = 0,01$:

   (a) n'admet aucune solution (c) admet deux solutions

   (b) admet une solution (d) admet une infinité de solutions

2. La fonction cosinus est une fonction :

   (a) impaire ; (b) paire ; (c) positive ; (d) ni paire ni impaire.

3. La fonction sinus est périodique de période :

   (a) π ; (b) $\dfrac{\pi}{2}$; (c) 2π ; (d) $\dfrac{\pi}{3}$.

4. La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x)$ a pour expression :

   (a) $f'(x) = \cos(3x)$; (b) $f'(x) = -3\cos(3x)$; (c) $f'(x) = 3\cos(3x)$.

Exercice 2 : *(5 points)*

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, en détaillant vos calculs :

1. $f(x) = -x^3 + \dfrac{5x^2}{4} + 8, \qquad x \in \mathbb{R}$;
2. $g(x) = \dfrac{x-4}{x^2+5}, \qquad x \in \mathbb{R}$;
3. $h(x) = \dfrac{5}{(2-x)^5}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
4. $k(x) = 4x\sqrt{-2x+5}, \qquad x \in \left]-\infty; \dfrac{5}{2}\right[$.

Exercice 3 : *(3 points)*

1. Rappeler formule de la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ ainsi que la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^n$.
2. On suppose connu la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ et la dérivée de x^n, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

   $$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

   Démontrer que :

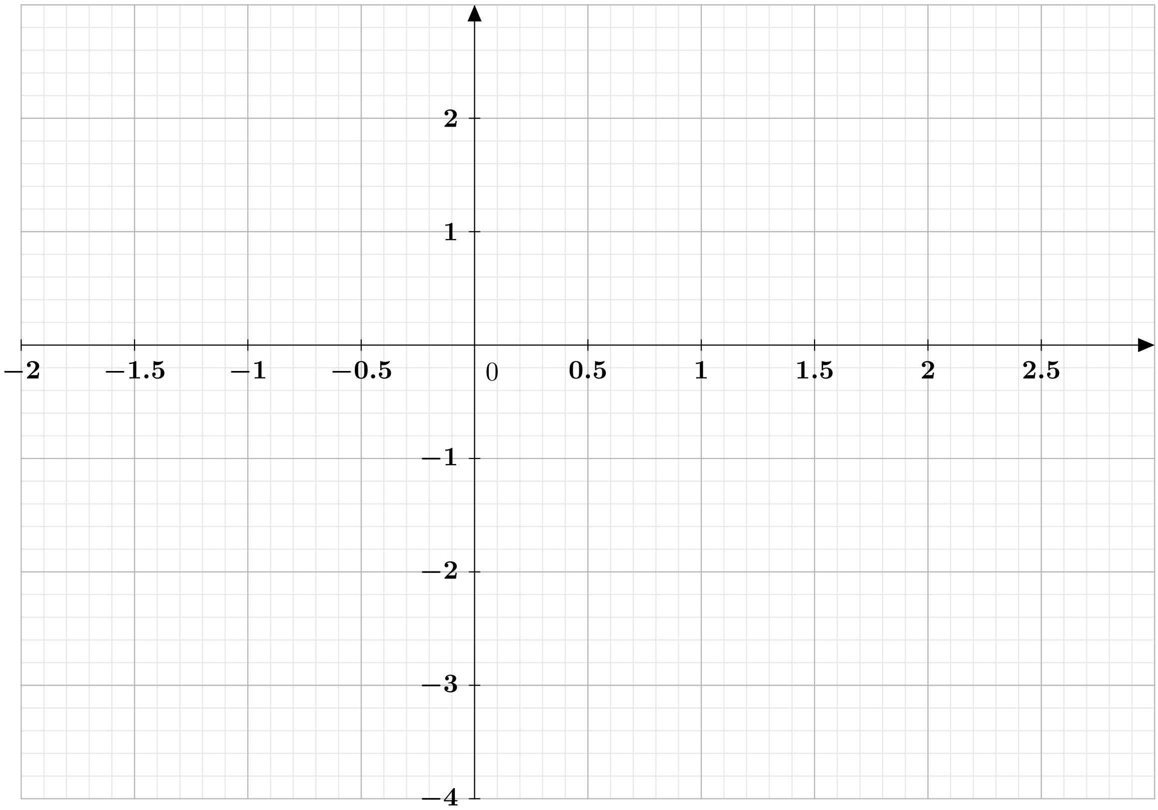
   $$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Exercice 4 : *(10 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (a) Préciser les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
   (b) Indiquer le nombre de tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (c) Tracer, ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que les tangentes horizontales à cette courbe déterminées en (b).



   (d) D'après le graphique ci-dessus, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   L'une d'elles est un nombre entier, laquelle ?
3. (a) Montrer que, sur $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β ($\alpha < \beta$).
   (b) Donner un encadrement à 10^{-3} près de α et β.
4. Détermination des valeurs exactes de α et β et étude du signe de $f(x)$.
   (a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = (x + 1)(x^2 - 3x + 1).$$

   (b) Résoudre, par les calculs, $f(x) = 0$.
   (c) En déduire les valeurs exactes de α et β.
   (d) Donner le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Discuter, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.