

# Devoir Maison 4

T<sup>le</sup>S3

(à rendre le lundi 27/01/2020)

16/01/2020

On considère  $\mathfrak{M}$  l'ensemble de toutes les suites  $(u_n)$  vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. On considère une suite géométrique  $(u_n)$  de raison  $q$ , de premier terme  $u_0$  et appartenant à  $\mathfrak{U}$ .

(a) Démontrer alors que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_0 q^n (q^2 - q - 1) = 0.$$

(b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est la suite nulle ou une suite géométrique de raison  $\phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  ou  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

2. On considère la suite  $(z_n)$  de  $\mathfrak{M}$  vérifiant  $z_0 = 0$  et  $z_1 = 1$ .

(a) Calculer les termes  $z_2$  jusqu'à  $z_6$ .

(b) Déterminer  $a$  et  $b$  pour que, quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :

$$z_n = a\phi^n + b\phi'^n.$$

(c) Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \phi \frac{1 - \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^n}.$$

(d) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n}$ .

3. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\sum_{k=0}^n z_k = z_{n+2} - 1.$$