IV. Limites des suites et recherches de seuil

1. Limite finie

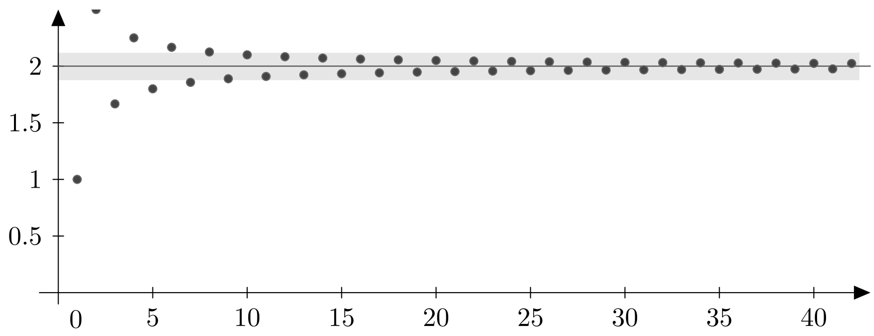
Définition 7.17 : ***d'une suite convergente vers l***

Une suite (u_n) *admet une limite* l (ou *converge vers* l) lorsque tout intervalle centré en l (i.e. de la forme $[l-h; l+h]$, $h > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Pour tout $h > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - l| < h$.
On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l.$$

Remarque 7.18 :

Graphiquement, cela se traduit par : quelque soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang à partir duquel tous les points de la suite (u_n) sont dans cette bande et il n'y a qu'un nombre fini de points à l'extérieur de la bande.



Remarque 7.19 :

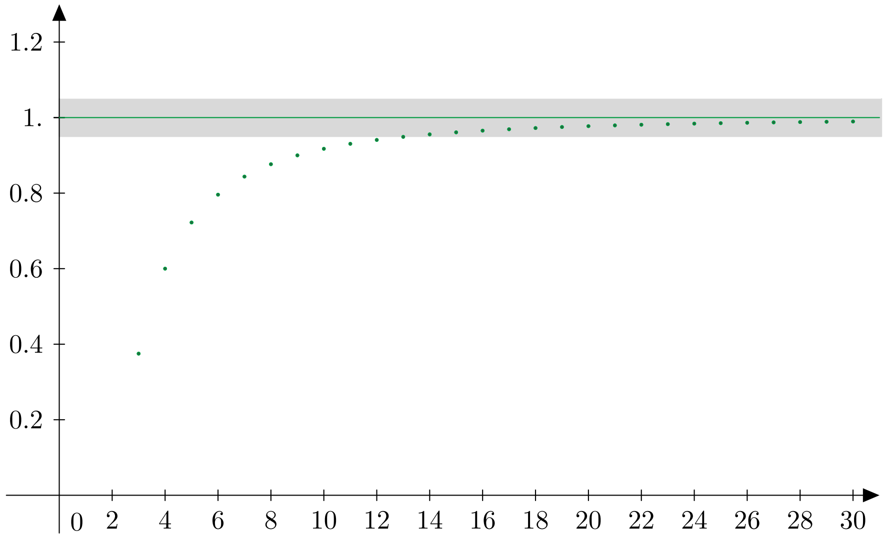
Pour conjecturer la limite d'une suite, on peut utiliser :

1. la représentation graphique de u_n dans le plan (c'est-à-dire l'ensemble des points $(n; u_n)$)
2. la représentation graphique de u_{n+1} en fonction de u_n ou de (u_n) sur un axe ;
3. un tableau de valeurs.

Exemple 7.20 :

On définit la suite (u_n) pour tout $n \geq 3$ par $u_n = 1 - \dfrac{10}{(n+1)^2}$.

1. Représenter le nuage de points $(n; u_n)$ pour $0 \leq n \leq 30$.



2. A l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).
   On trace donc la droite d'équation $y = 1$: lorsque n augmente, la distance entre chaque point $(n; u_n)$ et la droite d'équation $y = 1$ diminue.
   On grise la bande $l - 0,05 \leq y \leq l + 0,05$.
   On remarque que grace au graphique, lorsque $n \geq 14$, tous les points de la suite (u_n) sont à l'intérieur de la zone grisée, c'est-à-dire que lorsque $n \geq 14$, on a $|u_n - 1| < 0,05$.

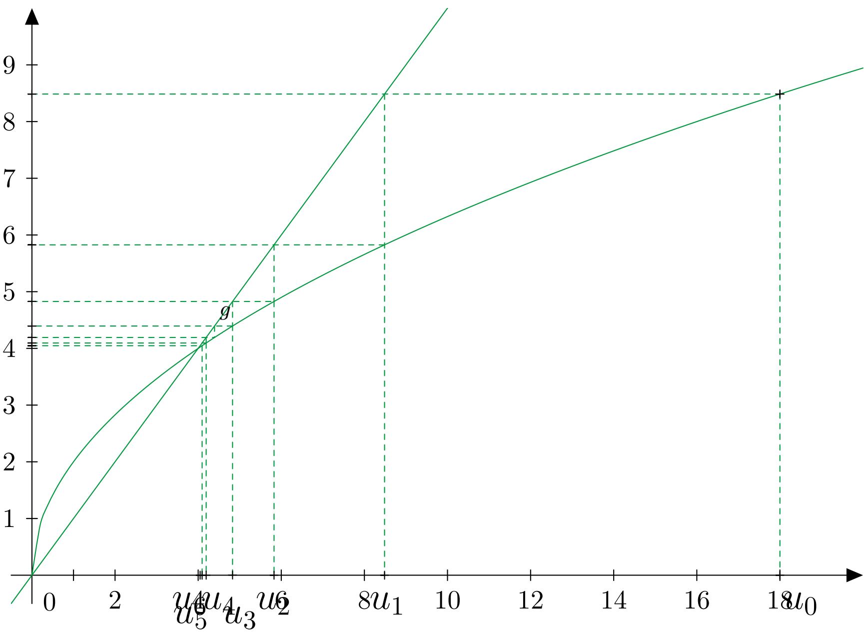
3. Ecrire un algorithme qui donne la valeur de n pour laquelle $|u_n - l| < 0,05$.
   Programmer cet algorithme avec Python et donner la valeur de n affichée.

   $u_n \leftarrow -9$
   $n \longleftarrow 0$
   Tant que $|u_n - 1| \geq M$
   $\quad n \longleftarrow n + 1$
   $\quad u_n \longleftarrow 1 - \dfrac{10}{(n+1)^2}$
   Fin Tant que

   Lorsque la variable M contient la valeur $0,05$,la variable n de l'algorithme contiendra la valeur 14 ce qui signifie que le premier entrier n tel que $|u_n - 1| < 0,05$ est $n = 14$.

Exemple 7.21 :

On a représenté, sur le graphique suivant, la fonction f. On définit (u_n) par la relation de récurrence suivante $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 18$.



A l'aide de ce graphique, on peut conjecturer que la limite de la suite (u_n) semble être 4.
En effet, les points représentant les valeurs de (u_n) semblent s'accumuler en 4 (u_4, u_5 et u_6).

2. Limite infinie

Définition 7.22 : ***d'une suite divergente vers*** $\pm\infty$

Une suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}^+$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel toutes les valeurs u_n sont plus grandes que M (i.e. tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq M$).
Une suite (u_n) *diverge vers* $-\infty$ lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}^-$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel toutes les valeurs u_n sont plus petites que M (i.e. tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \leq M$).
On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty.$$

Complément(s) :

La vidéo ci-dessous, d'Yvan MONKA, illustre la notion de limite finie à l'aide d'un exemple.
Il utilise un tableau de valeurs pour visualiser cette limite.
Vous pouvez visualiser cette vidéo en utilisant le lien suivant (à partir de 4 :10) :

`https://www.youtube.com/watch?v=CsBorh8LLyE&list=PLVUDmbpupCaoqExMkHrhYvWi4dHnApgG_&index=17`

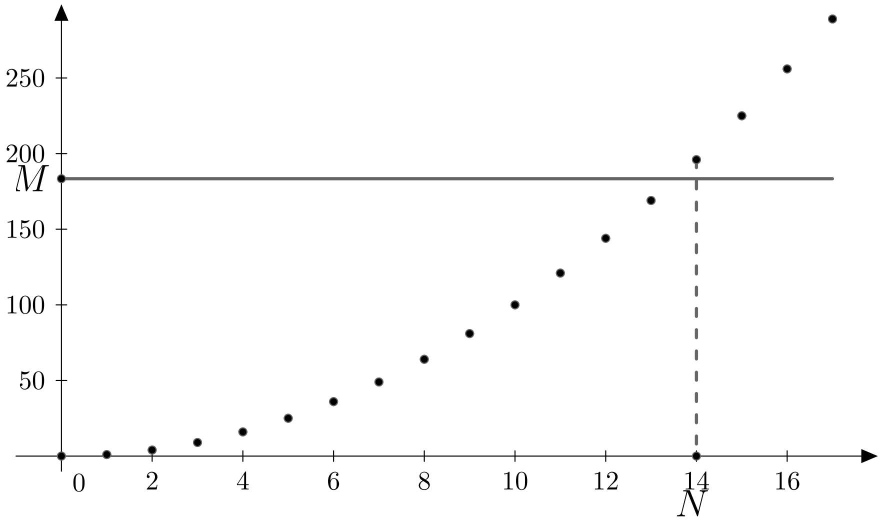
On s'interressera uniquement à la suite (u_n) de cette vidéo. *La suite (v_n) sera utilisée ultérieurement.*

Complément(s) :

Vous pouvez visualiser cet aspect graphique en utilisant l'exercice résolu de votre manuel qui se trouve en page 19 (graphique 2).

Remarque 7.23 :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: graphiquement, cela se traduit par : quelque soit un réel M positif, il existe un rang à patir duquel tous les points de la suite (u_n) sont au dessus de la droite d'équation $y = M$.



- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$: graphiquement, cela se traduit par : quelque soit un réel M négatif, il existe un rang à patir duquel tous les points de la suite (u_n) sont au dessous de la droite d'équation $y = M$. On obtiendrait un graphique semblable au précédent.

3. Suites n'ayant pas de limite

Il existe des suites qui nont pas de limites. On donnera ici un exemple d'une telle suite.

Exemple 7.24 :

La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = (-1)^n.$$

Cette suite (u_n) n'admet pas de limite, on dit qu'elle est divergente.
En effet, la suite (u_n) peut être définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leq u_n \leq 1$$

Ainsi, la limite de la suite (u_n) ne peut être $+\infty$ ou $-\infty$.
De plus, si la suite (u_n) tend vers une limite ℓ, alors l'intervalle $[\ell - 0,5; \ell + 0,5]$ ne peut contenir à la fois -1 (le termes impairs de (u_n)) et 1 (le termes pairs de (u_n)).
On dit alors que la suite est divergente.