

I. Les suites arithmétiques

Propriété 9.10 :

Les points représentant une suite arithmétique sont alignés.

Complément(s) :

Voir la vidéo du manuel « Suites particulière - Les suites arithmétiques ».

Exercice(s) :

Faire l'exercice 15 p. 31.

Théorème 9.11 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i &= 1 + 2 + \dots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Démonstration 9.12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $S_n = 1 + 2 + \dots + n$.

On écrit S_n de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}S_n &= 1 + 2 + \dots + n - 1 + n \\ S_n &= n + n - 1 + \dots + 2 + 1.\end{aligned}$$

En sommant ces deux égalités, il vient que :

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ fois}}.$$

Ainsi, on a $2S_n = n(n+1)$ et donc :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Exemple 9.13 :

Calculons $\sum_{k=1}^{23} k$.

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{23} k &= 1 + 2 + \dots + 22 + 23 \\ &= \frac{23 \times 24}{2} \\ &= 23 \times 12 \\ &= 276.\end{aligned}$$

Complément(s) :

Voir l'exercice résolu 3 p. 13 « Calculer une somme de termes consécutifs ».

Exercice(s) :

Faire l'exercice 31 p. 13.

Théorème 9.14 :

On considère une suite (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n u_i &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.\end{aligned}$$

Exemple 9.15 :

On considère la suite (w_n) définie par $w_n = n + 2$.

La suite (w_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $w_0 = 2$ car le terme général de cette suite est de la forme $w_n = an + b$ avec $a = 1$ et $b = 2$.

Calculons $\sum_{k=0}^{10} w_k$.

On a $w_0 = 2$ et $w_{10} = 12$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10} w_k &= (10+1) \times \frac{w_0 + w_{10}}{2} \\ &= 11 \times \frac{2+12}{2} \\ &= 11 \times 7 \\ &= 77.\end{aligned}$$

Propriété 9.16 :

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r .
Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=p}^n u_i &= u_p + u_{p+1} + \dots + u_n \\ &= (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.\end{aligned}$$

Remarque 9.17 :

De la dernière proposition, il faut alors retenir que :

$$\sum_{i=p}^n u_i = (\text{Nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{Dernier terme}}{2}.$$

Exercice(s) :

Faire les exercices 30 et 31 p. 32