I. Les suites géométriques

Définition 9.17 : ————— d'une suite géométrique —————

On considère une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite géométrique si et seulement si il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Ainsi, lorsque $I = \mathbb{N}$, on a :

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \cdots u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \cdots$$

q est appelée la raison géométrique de la suite $(u_n)_{n \in I}$.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Démontrer qu'une suite est géométrique ».

Exemple 9.18 :

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = 7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left(\frac{5}{3}\right)^n > 0$ et donc $7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donc $u_n > 0$ et on peut donc étudier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On va alors montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n} \\ &= \frac{7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{5}{3}}{7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n} \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \frac{5}{3} \times u_n$.

Finalement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{3}$.

Exercice(s) :

Faire les exercices 24 et 26 p. 31/32. (sans la partie « formule explicite » pour le 24).

Théorème 9.19 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Si (u_n) est géométrique de raison q , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

- Inversement, si le terme général d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de la forme $u_n = a \times b^n$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = b$ et de premier terme $u_0 = a$ si (u_n) est définie à partir de 0.

Démonstration 9.20 :

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- On suppose que (u_n) est géométrique de raison q de premier terme u_0 .

On définit la suite (v_n) de terme général $v_n = u_0 \times q^n$.

Montrons alors que (u_n) et (v_n) définissent la même suite.

Pour $n = 0$, on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 \times q^0 \\ &= u_0. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que la suite (v_n) est aussi géométrique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_0 \times q^{n+1} \\ &= u_0 \times q^n \times q \\ &= v_n \times q. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est alors géométrique de raison q et de premier terme $v_0 = u_0$: il s'agit donc de la suite (u_n) .

- On suppose que la suite (u_n) a pour terme général $u_n = a \times b^n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a \times b^{n+1} \\ &= a \times b^n \times b \\ &= u_n \times b. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = b$ et son premier terme est $u_0 = a$. □

Complément(s) :

Lire l'exercice résolu 1 p. 15 : « Reconnaître une suite géométrique ».