Chapitre 8
Généralités sur les Suites

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Calculer les termes d'une suite à partir de son expression	1, 2, 6, 10, 11 et 53 p. 30/34		
Représenter graphiquement les termes d'une suite	Fiche d'exercices		
Déterminer le sens de variations d'une suite	39 et 40 p. 33		
Déterminer la convergence d'une suite	Fiche d'exercices		

Travaux Dirigés :

- TD 9 : Etude d'une suite.
- TD 10 : Sommes des n premiers carrés et somme des n premiers cubes.

Introduction

Leonardo FIBONACCI (1180 à 1250) de son vrai nom Leonado DA PISA est un mathématicien qui a parcouru plusieurs pays méditéranéens (Sicile, Grèce, Syrie et Egypte). Il apprend les mathémtiques grecques et arabes. Il est notamment convaincu par la supériorité du système d'écriture des nombres avec les chiffres arabes. Son oeuvre est fondamentale puisqu'il permit d'établir un lien entre les mathématiques arabes et celles de La Renaissance. Il a notamment permis l'introduction des nombres arabes en Occident.

I. Définitions et notations

Définition 8.1 : d'une suite

Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie infinie de $\mathbb{N}$.
On note une suite entre parenthèse :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Remarque 8.2 :

On note une suite entre parenthèse.
u_n est *l'image de* n, on dit que u_n est *le terme général* de la suite (u_n), ou *le terme d'indice* n, ou *le terme de rang* n.
On notera bien la différence entre u_n qui désigne un nombre et (u_n) qui désigne une suite.

Exemple 8.3 :

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 10$.
Le terme d'indice 2 est $u_2 = -4$, le terme d'indice 10 est $u_{10} = 20$ et le terme d'indice $2n$ est $u_{2n} = 6n - 10$.

Remarque 8.4 :

Il est possible qu'une suite ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0. On note parfois $(u_n)_{n\geq n_0}$ et son premier terme est u_{n_0}.
Par exemple :

- La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-3}$ n'est définie que pour $n \geq 3$, on la notera $(u_n)_{n\geq 3}$.
  En effet, lorsque $n < 3$, on a $n - 3 < 0$ et comme la racine carrée n'est définie que pour les nombres positifs, on ne peut pas définir cette suite lorsque $n < 3$.
- La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geq 1$, on la notera $(u_n)_{n\geq 1}$.
  En effet, la fonction inverse n'est pas définie en 0 donc la suite n'est pas définie en 0.

II. Modes de générations et représentations des suites

Il existe plusieurs façons de définir une suite numérique :

- par *une écriture explicite* : le terme général u_n est exprimé en fonction de n ($u_n = f(n)$),
- par *une écriture récurrente* : le terme général est exprimé en fonction du terme précédent ($u_{n+1} = f(u_n)$).

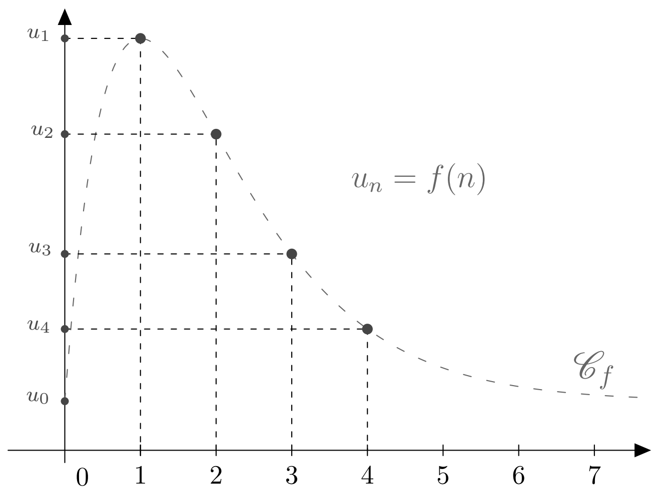
1. Les suites définies de manière explicite

Exemple 8.5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Calculer u_0, u_2 et u_{n+1}.

Remarque 8.6 :

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous une forme explicite, c'est-à-dire de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.
Graphiquement, les termes de la suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les ordonnées des points de coordonnées $(n; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe $\mathscr{C}_f$.
On peut alors lire les termes de la suite sur l'axe des ordonnées (comme pour lire une image avec les fonctions).
On obtient alors le graphique suivant :



2. Les suites définies par récurrence

On considère une fonction f définie sur un intervalle I, telle que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$ (on peut aussi noter que $f(I) \subset I$). On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 (avec $u_0 \in I$) et par *la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$.

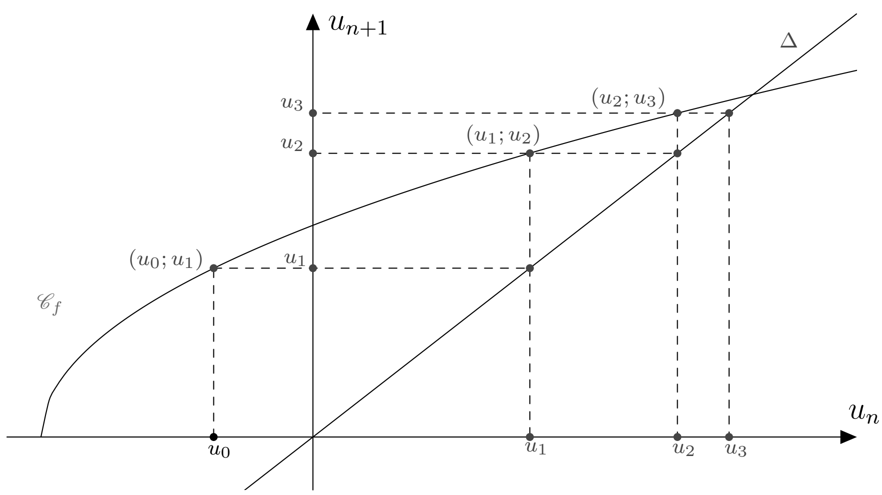
Exemple 8.7 :

On considère une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et une suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ telle que $u_0 = 256$.
Calculer u_3.

Remarque 8.8 :

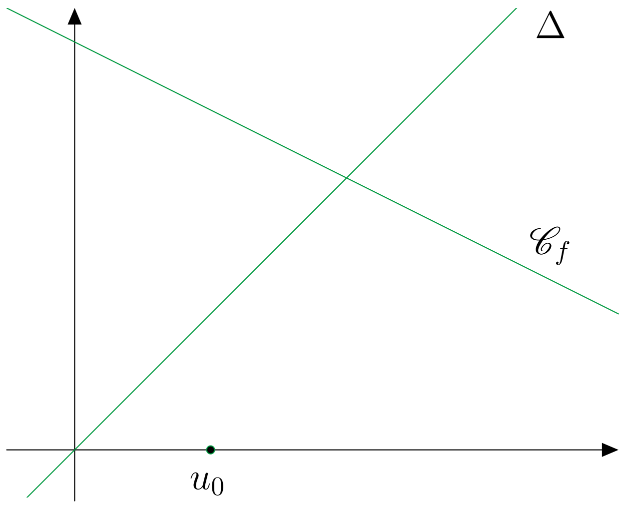
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous une forme récurrente, c'est-à-dire de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

L'axe des abscisses représente les termes u_n et l'axe des ordonnées représente les termes u_{n+1}.



Exemple 8.9 :

On considère une suite (u_n) définie par récurrence, c'est-à-dire de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur le graphique suivant, on donne la représentation graphique de la fonction f, la droite Δ d'équation $y = x$ ainsi que la valeur de u_0 sur l'axe des abscisses.
Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_1, u_2 et u_3.



Remarque 8.10 :

La donnée de u_0 et d'une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ ne permet pas toujours de définir une suite.
La condition « pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$ » est importante.

Exemple 8.11 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4}{4-x}$.
Si on prend $u_0 = 3$, alors, on a :

$$u_1 = f(u_0) \quad = 4.$$

Or f n'est pas définie en 4, on ne peut donc pas calculer u_2 et la suite ne peut être définie.

Remarque 8.12 :

On évitera la confusion entre une suite définie à l'aide d'une fonction f par récurrence et de manière explicite.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.

- $u_n = f(n)$: On a $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, ...
- $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 1$: On a $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0) = 3$, $u_2 = f(u_1) = 7$, $u_3 = f(u_2) = 15$, ...

Ces deux suites sont définies par une même fonction pourtant, elles ne définissent pas la même suite.

III. Monotonie des suites

Définition 8.13 : — d'une suite croissante, décroissante ou constante

On considère I une partie infinie de $\mathbb{N}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est :

- *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) lorsque pour tout $n \in I$, on a :
$$u_{n+1} \leq u_n \text{ (respectivement } u_{n+1} < u_n).$$
- *croissante* (respectivement *strictement croissante*) lorsque pour tout $n \in I$, on a :
$$u_{n+1} \geq u_n \text{ (respectivement } u_{n+1} > u_n).$$
- *constante* lorsque pour tout $n \in I$, on a :
$$u_n = u_{n+1}.$$

Définition 8.14 : d'une suite monotone

Une suite (u_n) est dite *monotone* lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Méthodologie 8.15 : Etudier la monotonie d'une suite

Dans la pratique, pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in I}$, on peut :

1. si la suite s'écrit de manière fonctionnelle (du type $u_n = f(n)$), alors on peut étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$;
2. on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
3. lorsque tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in I}$ sont du même signe et non nuls, on peut comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple 8.16 :

Etudier la monotonie des suites (u_n) suivantes.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4$ et on définit la suite (u_n) par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -3n + 1$.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$.

IV. Limites des suites et recherches de seuil

1. Limite finie

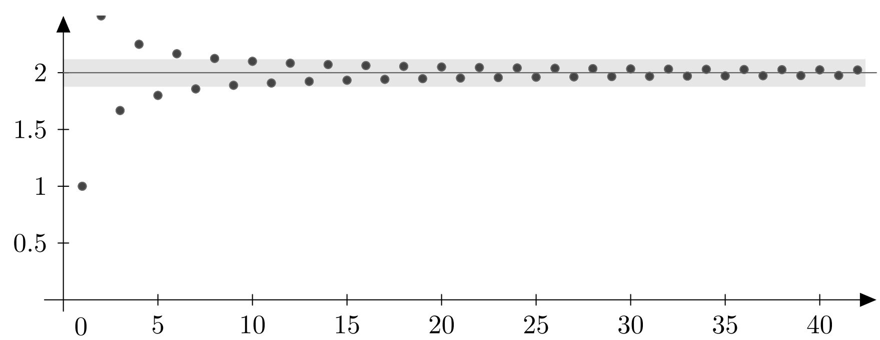
Définition 8.17 : d'une suite convergente vers l

Une suite (u_n) *admet une limite* l (ou *converge vers* l) lorsque tout intervalle centré en l (i.e. de la forme $[l - h; l + h]$, $h > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Pour tout $h > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - l| < h$.
On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Remarque 8.18 :

Graphiquement, cela se traduit par : quelque soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang à partir duquel tous les points de la suite (u_n) sont dans cette bande et il n'y a qu'un nombre fini de points à l'extérieur de la bande.



Remarque 8.19 :

Pour conjecturer la limite d'une suite, on peut utiliser :

1. la représentation graphique de u_n dans le plan (c'est-à-dire l'ensemble des points $(n; u_n)$)
2. la représentation graphique de u_{n+1} en fonction de u_n ou de (u_n) sur un axe ;
3. un tableau de valeurs.

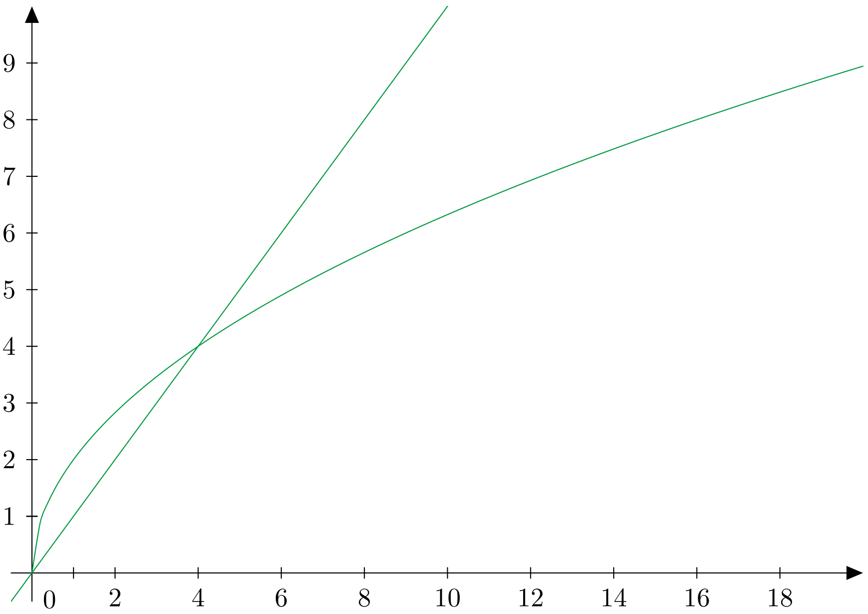
Exemple 8.20 :

On définit la suite (u_n) pour tout $n \geq 3$ par $u_n = 1 - \dfrac{10}{(n+1)^2}$.

1. Représenter le nuage de points $(n; u_n)$ pour $0 \leq n \leq 30$.
2. A l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).
3. Ecrire un algorithme qui donne la valeur de n pour laquelle $|u_n - l| < 0,05$.
   Programmer cet algorithme avec Python et donner la valeur de n affichée.

Exemple 8.21 :

On a représenté, sur le graphique suivant, la fonction f. On définit (u_n) par la relation de récurrence suivante $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 18$.



2. Limite infinie

Définition 8.22 : ***d'une suite divergente vers*** $\pm\infty$

Une suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}^+$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel toutes les valeurs u_n sont plus grandes que M (i.e. tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq M$).
Une suite (u_n) *diverge vers* $-\infty$ lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}^-$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel toutes les valeurs u_n sont plus petites que M (i.e. tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \leq M$).
On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty.$$

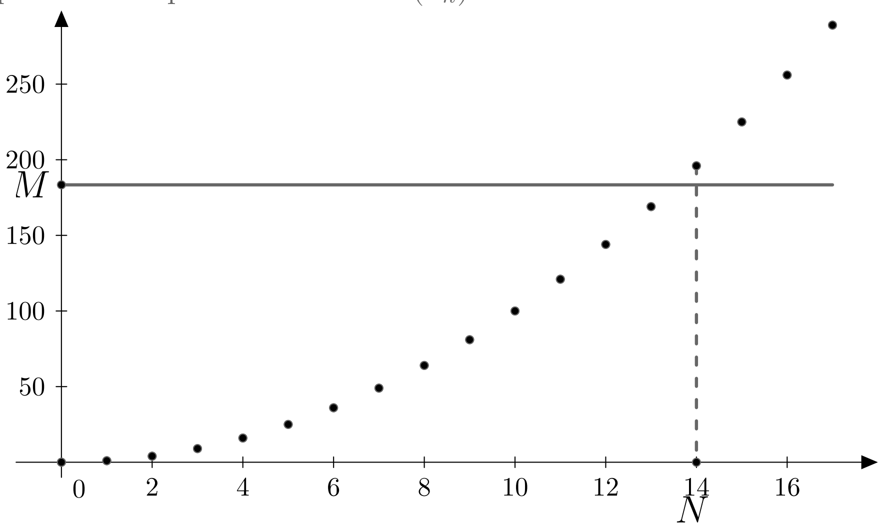
Exemple 8.23 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer que cette suite est strictement décroissante.
2. On admet que cette suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
   On souhaite alors déteminer le seuil N à partir duquel on a pour tout $n \geq N$, $u_n < M$, où M est un réel fixé.
   La résolution d'une inéquation du type $u_n < -100$ est compliquée ici (du fait de la définition récurrente de la suite), donc on va se servir des algorithmes pour résoudre ces inéquations.
   Ecrire un algorithme qui permet de répondre à ce problème.
   Vérifier en programmant votre algorithme Python que lorsque M contient la valeur -100, la variable n contiendra à la fin de l'algorithme la valeur 34 ce qui signifie que le premier entier n tel que $u_n < -100$ est $n = 34$.

Remarque 8.24 :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$: graphiquement, cela se traduit par : quelque soit un réel M positif, il existe un rang à patir duquel tous les points de la suite (u_n) sont au dessus de la droite d'équation $y = M$.



- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$: graphiquement, cela se traduit par : quelque soit un réel M négatif, il existe un rang à patir duquel tous les points de la suite (u_n) sont au dessous de la droite d'équation $y = M$.
  On obtiendrait un graphique semblable au précédent.