NOM : .... Prénom : ....

Exercice 1 : ***(4 points)***

Pour chacune des questions ci-dessous, entourer **la ou les** réponse(s) exacte(s) **sur l'énoncé**.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point et l'absence de réponse ou une réponse incomplète est comptée 0 point. Si le total des points est négatif la note est ramenée à 0 pour cet exercice.

1. $\binom{12}{6}$ est égale à :

   (a) $\frac{1}{2}$; (b) 6 ; (c) 924 ; (d) 72.

2. St X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,25$, la probabilité $P(X = 2)$ est égale à :

   (a) $\frac{2}{7}$; (b) $\frac{1}{64}$; (c) $\frac{1}{8\,192}$; (d) $\frac{5\,103}{16\,384}$

3. On considère trois événements A, B et C tels que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = 0,4$, $P(A\cup B) = 0,65$, $P(A \cup C) = 0,7$ et $P(B \cup C) = 0,8$. On a alors :

   (a) A et B sont indépendants ; (b) A et C sont indépendants ; (c) B et C sont indépendants ;

4. Un élève répond au hasard aux 5 questions d'un QCM. Chaque proposition du test propose trois réponses dont une seule est juste. On appelle A l'événement : « L'élève a 5 réponses justes ».

   (a) $P(A) = \frac{1}{5}$; (b) $P(A) = \frac{5}{3}$; (c) $P(A) = \frac{1}{15}$; (d) $P(A) = \frac{1}{243}$.

Exercice 2 : ***(7 points)***

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaine de production. Il peut arriver toute fois que le système soit mis en défaut.
Des études ont montré que, sur une journée :

- en l'absence de tout incident, l'alarme se déclenche avec une probabilité de $\frac{1}{50}$;
- la probabilité qu'un incident survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $\frac{1}{500}$;
- la probabilité qu'un incident se produise est égale à $\frac{1}{100}$.

On pourra noter :

- A l'événement : « L'alarme se déclenche » ;
- I l'événement : « Un incident se produit ».

Toutes les probabilités demandées devront être exprimées sous la forme de fractions irréductibles.

1. Démontrer que la probabilité que l'alarme se déclenche sachant qu'un incident s'est produit est $\frac{4}{5}$.
2. Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.
3. Démontrer que la probabilité que, sur une journée, l'alarme se déclenche est $\frac{139}{5\,000}$.
4. Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système soit mis en défaut ?
5. Un jour, l'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

Exercice 3 : *(3 points)*

Calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = -3 \times (1,1)^n$;
2. $v_n = n^2 + 3n - 2$;
3. $w_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2-n}$

Exercice 4 : *(9 points)*

On considère la suite (u_n) (arithmético-géométrique) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 8 \quad n \geq 0 \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite de la suite (u_n) de deux manières distinctes.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : avec une suite auxiliaire

On considère la suite z_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$z_n = u_n - 16.$$

1. Démontrer que la suite (z_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et préciser son premier terme.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie B : avec une récurrence

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
2. Justifier alors que la suite (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Partie C : étude d'un algorithme

L'objectif de cette partie est de déterminer le rang N à partir duquel, lorsque $n \geq N$, tous les termes de la suite (u_n) vérifient $|u_n - 16| < 10^{-6}$.

1. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le rang N demandé dans l'objectif ci-dessus :

```
n ⟵ .........
u ⟵ .........
Tant que ................ faire :
    n ⟵ .........
    u ⟵ .........
Fin Tant que
Afficher .........
```

2. Répondre à l'objectif de cette partie à l'aide de la calculatrice.
   On détaillera la réponse en expliquant les étapes faites à la calculatrice.